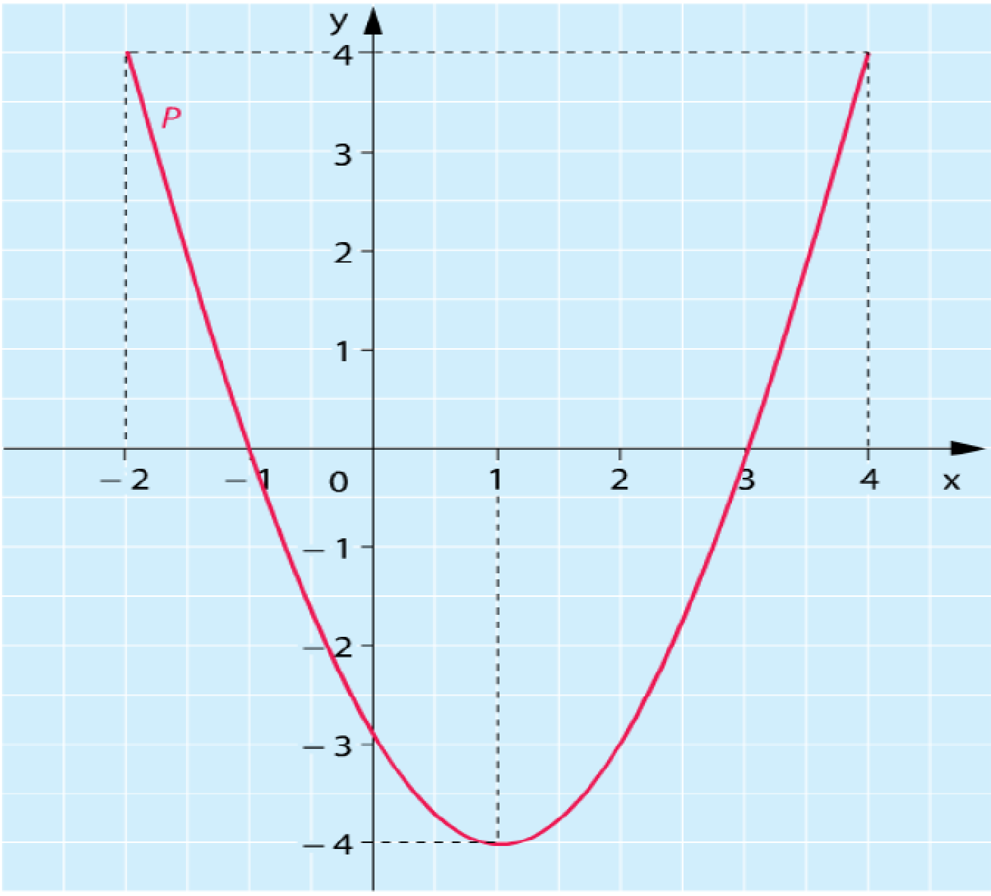
31. +++ Lectures graphiques et résolution algébrique

Soit f la fonction définie sur $[-2, 4]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

La courbe représentative P de f est donnée sur la figure suivante.



1. Déterminer graphiquement les solutions dans $[-2, 4]$ de l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$.

2. Résoudre graphiquement dans $[-2, 4]$ l'inéquation $x^2 - 2x - 3 \leq 0$.

3. Retrouver par le calcul les résultats des questions **1.** et **2.**.

39. +++ Deux remises successives

On décide d'acheter un drone d'une valeur de 500 euros pour équiper une salle de travaux pratiques d'un lycée technologique. Le fournisseur consent deux remises successives de x % et de $(x - 5)$ %, où x est un nombre appartenant à l'intervalle $[5, 100]$.

1. Calculer le prix net à payer avec $x = 8$.

2. Dans cette question le prix net à payer après les deux remises est de 382,50 euros.

a) Démontrer que x est solution de l'équation :

$x^2 - 205x + 2\,850 = 0$.

b) En déduire x.

57. +++ Coût de production et bénéfice

Un artisan fabrique des vases qu'il met en vente. On suppose que tous les vases fabriqués sont vendus.

L'artisan veut faire une étude sur la production d'un nombre de vases compris entre 0 et 60. Il estime que le coût de production de x vases fabriqués est modélisé par la fonction C dont l'expression est :

$$C(x) = x^2 - 10x + 500,$$

où x appartient à l'intervalle $[0, 60]$.

Chaque vase est vendu 50 euros.

Sur le graphique donné en annexe 2, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction C et $\mathscr{D}$ est la droite d'équation : $y = 50x$.

1. Par lecture graphique, déterminer :

a) le coût de production de 40 vases fabriqués.

b) la production, à une unité près, qui correspond à un coût total de 1 300 euros.

2. On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués.

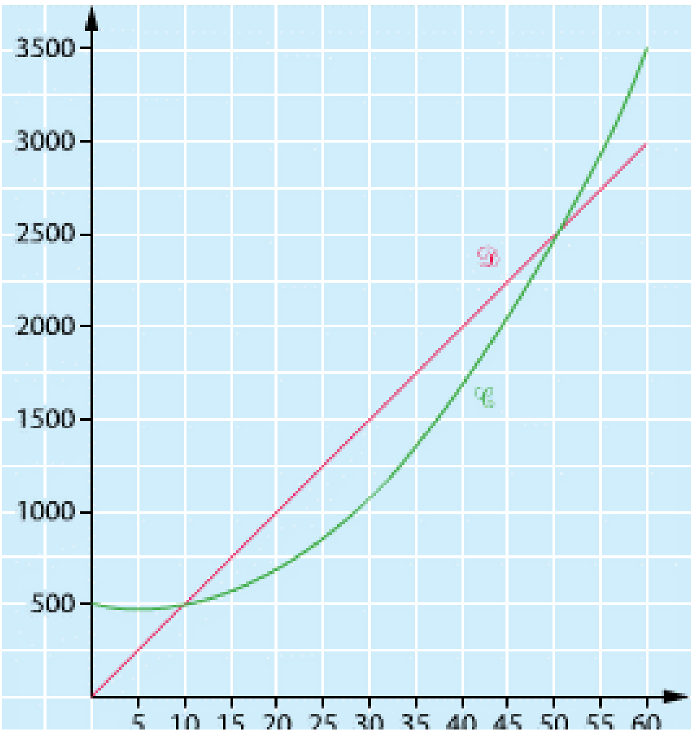
a) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

b) Déterminer graphiquement le nombre de vases que l'artisan doit fabriquer pour réaliser un bénéfice.

c) Résoudre par le calcul sur $[0, 60]$ l'inéquation $R(x) \geq C(x)$.

3. a) Montrer que le bénéfice, en euros, réalisé par la fabrication et la vente de x vases, est donné par la fonction B dont l'expression est $B(x) = -x^2 + 60x - 500$, où x appartient à l'intervalle $[0, 60]$.

4. Calculer le bénéfice pour trente vases fabriqués et vendus.



Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 2

DÉFINITION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$:
$f(x) = ax^2 + bx + c$.

La **fonction dérivée** de f, notée f', est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f'(x) = 2ax + b}$.

Exemples

Pour $f : x \mapsto f(x) = x^2$, on a $f' : x \mapsto f'(x) = 2x$.

Pour $f : x \mapsto f(x) = x^2 + 5x - 1$, on a $f' : x \mapsto f'(x) = 2x + 5$.

Pour $f : x \mapsto f(x) = -3x^2 + 4x + 3$, on a $f' : x \mapsto f'(x) = -6x + 4$.

B. Application à l'étude des variations de la fonction

Observation de la fonction carré

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) = 2x$		$-$	0	$+$	

Pour la fonction carré, nous observons que :
– sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, f est décroissante et $f'(x) \leq 0$,
– sur l'intervalle $[0, +\infty[$, f est croissante et $f'(x) \geq 0$.

Étude des variations d'une fonction polynôme de degré 2

Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

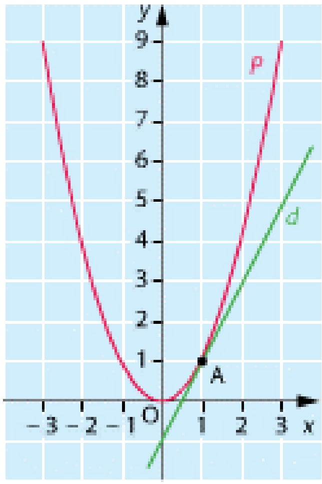
Si $f'(x) = 2ax + b \geq 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors f est croissante sur l'intervalle I.

Si $f'(x) = 2ax + b \leq 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors f est décroissante sur l'intervalle I.

Ce théorème permet d'obtenir les variations d'une fonction polynôme de degré 2 sans retenir par cœur les deux tableaux de variation rappelés dans la partie **1** du chapitre 3.

C. Application au tracé de la parabole représentative de la fonction

Définition



parabole P représentative de la fonction au point A d'abscisse 1 : c'est la droite passant par A(1, 1) et de coefficient directeur $f'(1) = 2$.

Plus généralement la tangente en un point d'une parabole est définie de la façon suivante.

DÉFINITION

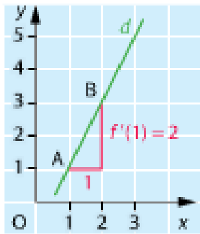
- La tangente en un point A de la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(x_A)$.
- $f'(x_A)$ est le **nombre dérivé** de f en x_A.

PROPRIÉTÉ

La tangente au point $A(x_A, y_A)$ à la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 a pour équation :

$$y = f'(x_A)(x - x_A) + y_A.$$

Tracé d'une tangente



Reprenons l'exemple de la tangente d en A(1, 1) à la parabole P représentative de la fonction carré $f : x \mapsto x^2$.

Soit B le point de d qui a pour abscisse :

$x_B = x_A + 1 = 1 + 1 = 2.$

Le coefficient directeur de la droite (AB) = d est :

$\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = f'(1).$

Donc $\dfrac{y_B - 1}{1} = f'(1)$,

$y_B - 1 = f'(1)$, donc $y_B = 1 + f'(1)$,

$y_B = y_A + f'(1)$ car $y_A = 1$.

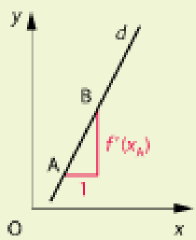
Ainsi, **à partir d'un point A donné, on obtient un deuxième point B de la tangente en A à P en ajoutant 1 à l'abscisse de A et $f'(x_A)$ à l'ordonnée de A.**

Cette méthode reste valable pour n'importe quelle fonction polynôme f de degré 2 et n'importe quel point A de sa courbe représentative : seules les valeurs numériques de x_A, de $y_A = f(x_A)$ et de $f'(x_A)$ changent.

MÉTHODE

Tracé de la tangente d à la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 en un de ses points A :

À partir du point donné $A(x_A, y_A)$ où $y_A = f(x_A)$, on obtient un deuxième point B de la tangente d en ajoutant 1 à l'abscisse de A et $f'(x_A)$ à l'ordonnée de A : $x_B = x_A + 1$ et $y_B = y_A + f'(x_A)$.



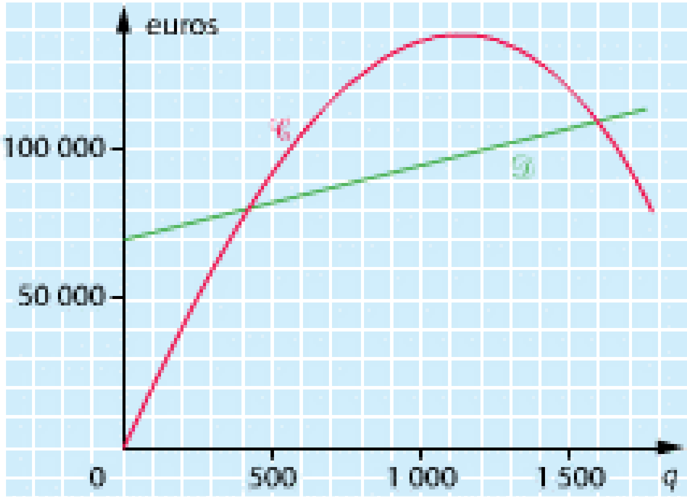
Remarques

- **Dans le cas particulier où $f'(x_A) = 0$,** on a $y_B = y_A$: **la tangente en A à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses.**
- Si nécessaire, on peut ajouter 2 en abscisse et $2f'(x_A)$ en ordonnée, ou 0,1 en abscisse et $0{,}1f'(x_A)$ en ordonnée…

44. +++ Lectures graphiques

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente la recette exprimée en euros, d'une entreprise agricole en fonction de la quantité de pommes de terre récoltées, q, exprimée en tonnes. La courbe $\mathscr{C}$ est une parabole.

La droite $\mathscr{D}$ représente le coût de production en euros en fonction de la quantité récoltée q.



1. Déterminer graphiquement la recette pour une récolte de : 400 tonnes, 600 tonnes, 1 100 tonnes, 1 600 tonnes.

2. Déterminer graphiquement la récolte correspondant à une recette de 110 000 euros.

Déterminer le coût de production correspondant.

3. Déterminer graphiquement la quantité récoltée correspondant à une recette maximale.

4. Donner une explication à caractère économique du fait, que, au-delà d'une certaine production, la recette diminue alors que la production augmente.

5. La culture est rentable lorsque la recette est supérieure au coût de production.

a) Déterminer graphiquement si la culture est rentable pour une récolte de 200 tonnes, pour une récolte de 1 000 tonnes.

b) Déterminer graphiquement dans quel intervalle doit varier la récolte q pour que la culture soit rentable.

Utiliser une calculatrice pour étudier une fonction

Coût et bénéfice

Ce TP est destiné à vous guider dans l'utilisation d'une calculatrice pour dresser un tableau de valeurs, tracer des courbes et analyser un graphique.

Une entreprise fabrique un certain type de produit chimique. Chaque jour, elle produit x tonnes de produit, x étant compris entre 0 et 70.

Le coût, exprimé en euros, de la production journalière de x tonnes de produit est donné par :

$f(x) = x^3 - 90x^2 + 2\,700x$.

On suppose que toute la production est vendue au prix de 900 € la tonne. La recette journalière totale, exprimée en euros, est alors donnée par : $g(x) = 900x$.

A. Tableau de valeurs

On souhaite compléter le tableau suivant.

x	0	10	20	30	40	50	60	70
$f(x)$								
$g(x)$								

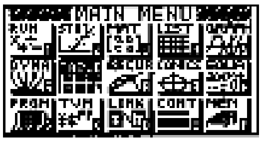
Calculatrice Casio

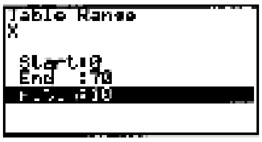
On entre dans le menu des tables en faisant MENU TABLE EXE.

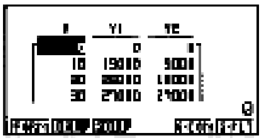
Puis on entre en Y1 et en Y2 les expressions des fonctions f et g.

Pour régler la table, faire RANG, puis entrer dans Start la première valeur de x, dans End la dernière valeur de x et dans pitch le pas entre chaque valeur de x.

Faire TABL pour obtenir la table.



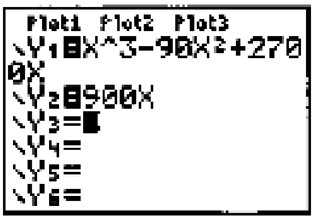


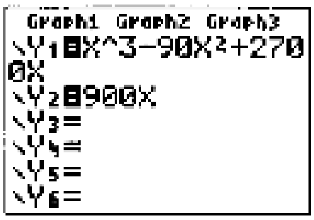


Calculatrice Texas Instruments

Pour les modèles traduits en français, les instructions sont en bleu.

Pour éditer les fonctions, faire Y= ou f(x) puis, aux lignes Y_1 et Y_2, entrer les expressions de f et g.





Pour régler la table, faire 2nd TBLSET ou 2nde déf table puis entrer dans TblStart ou DébTable la première valeur de x et dans ΔTbl ou PasTable le pas entre chaque valeur de x.

Faire 2nd TABLE pour obtenir le tableau suivant.

1. À l'aide des résultats affichés par votre calculatrice, reproduire et compléter le tableau de valeurs désiré.

2. Pour quelles valeurs de x, figurant dans le tableau, l'entreprise dégage-t-elle un bénéfice ?

B. Représentation graphique

On désire réaliser, sur une calculatrice, une représentation graphique des fonctions f et g sur l'intervalle $[0, 70]$.

Calculatrice Casio

Venir dans le menu de graphiques en faisant MENU GRAPH EXE.

Pour régler la fenêtre, faire SHIFT V-Window puis entrer Xmin et max selon le domaine d'étude, scale correspond au pas de graduation de l'axe. Pour les choix de Ymin et max, on considère les valeurs apparues dans le tableau précédent.

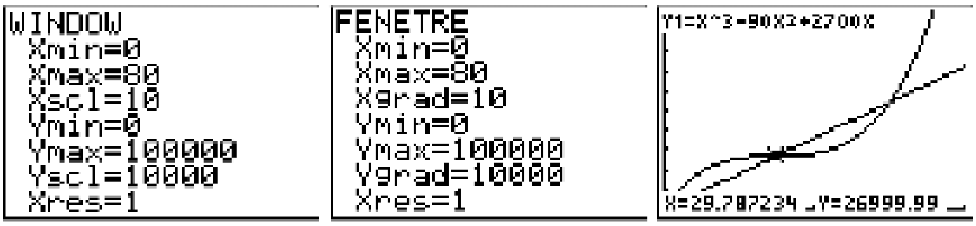
Dans l'écran d'accueil du menu graphique, faire DRAW pour obtenir le tracé.

Pour parcourir la courbe, faire SHIFT Trace puis ◄ ou ►.

Calculatrice Texas Instruments

Pour régler la fenêtre, faire WINDOW ou fenêtre puis entrer Xmin et Xmax selon le domaine d'étude, Xscl ou Xgrad correspond au pas de graduation de l'axe. Pour les choix de Ymin et Ymax, on considère les valeurs apparues dans le tableau précédent.

Faire GRAPH ou graphe pour le tracé et pour parcourir la courbe, faire TRACE ou trace et ◄ ou ►.



1. Comment peut-on déterminer graphiquement l'intervalle auquel doit appartenir x pour que l'entreprise dégage un bénéfice ?

2. Vérifier le résultat précédent avec celui de la question **A.2.**.

C. Application : conjecturer les variations d'une fonction polynôme de degré 3

1. Tracer sur l'écran de votre calculatrice la représentation graphique de la fonction f définie par l'intervalle $[-2, 3]$ par $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 3$.

2. Proposer une conjecture permettant de compléter le tableau de variation de la fonction f.

x	-2 $\qquad\qquad$ 3
Variation de f	