Exercice 1

Déterminer les racines des polynômes :

$P\left(x\right)=64\,x^2-49$ $\qquad Q\left(x\right)=-6\,x-1-x^2$ $\qquad R\left(x\right)=16+25\,x^2+40\,x$

Exercice 2

Déterminer les racines des polynômes :

$P\left(x\right)=-2\,x-7\,x^2$ $\qquad Q\left(x\right)=-1+4\,x-x^2$ $\qquad R\left(x\right)=1+16\,x^2+8\,x$

Exercice 3

►**1.** On considère la fonction k définie sur $I=[-10\ ;\ 0]$ par $k(x)=\dfrac{2x-8}{-4x+4}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(x)$ pour tout $x\in[-10\ ;\ 0]$.

c) En déduire le sens de variations de k sur I.

►**2.** Étudier le sens de variations de f définie par $f(x)=2x^3-3x^2-336x-5$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

Exercice 4

►**1.** On considère la fonction g définie sur $I=[-10\ ;\ -1]$ par $g(t)=\dfrac{-2t-6}{-5t-2}$.

a) Justifier que g est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $g'(t)$ pour tout $t\in[-10\ ;\ -1]$.

c) En déduire le sens de variations de g sur I.

►**2.** Étudier le sens de variations de k définie par $k(x)=x^3-18x^2+108x+3$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

Corrigé de l'exercice 1

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 64\,x^2 - 49 \\ &= \left(\sqrt{64}\,x\right)^2 - \left(\sqrt{49}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{64}\,x\sqrt{49}\right) \times \left(\sqrt{64}\,x - \left(\sqrt{49}\right)\right) \\ &= (8\,x+7) \times (8\,x-7) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-7}{8}}$ et $\boxed{\dfrac{7}{8}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= 25\,x^2 + 40\,x + 16 \\ &= (5\,x)^2 + 2 \times 5\,x \times 4 + 4^2 \\ &= (5\,x+4)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{\dfrac{-4}{5}}$

$Q(x) = -x^2 - 6\,x - 1$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a=-1$, $b=-6$ et $c=-1$:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-6)^2 - 4 \times (-1) \times (-1) \\ \Delta &= 36 - 4 \\ \Delta &= 32 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{6-\sqrt{32}}{2 \times (-1)} \qquad x_2 = \frac{6+\sqrt{32}}{2 \times (-1)}$$

$$x_1 = \frac{6-\sqrt{16}\times\sqrt{2}}{-2} \qquad x_2 = \frac{6+\sqrt{16}\times\sqrt{2}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{\left(-3+2\sqrt{2}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{\left(-3-2\sqrt{2}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}$$

$$x_1 = -3+2\sqrt{2} \qquad x_2 = -3-2\sqrt{2}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{-3+2\sqrt{2}}$ et $\boxed{-3-2\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 2

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= -7\,x^2 - 2\,x \\ &= -x \times (7\,x+2) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{-2}{7}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= 16\,x^2 + 8\,x + 1 \\ &= (4\,x)^2 + 2 \times 4\,x \times 1 + 1^2 \\ &= (4\,x+1)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{\dfrac{-1}{4}}$

$Q(x) = -x^2 + 4\,x - 1$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a=-1$, $b=4$ et $c=-1$:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4^2 - 4 \times (-1) \times (-1) \\ \Delta &= 16 - 4 \\ \Delta &= 12 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{12}}{2 \times (-1)} \qquad x_2 = \frac{-4+\sqrt{12}}{2 \times (-1)}$$

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{-2} \qquad x_2 = \frac{-4+\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}$$

$$x_1 = 2+\sqrt{3} \qquad x_2 = 2-\sqrt{3}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{2+\sqrt{3}}$ et $\boxed{2-\sqrt{3}}$

Corrigé de l'exercice 3

▶**1.** On considère la fonction k définie sur $I = [-10\ ;\ 0]$ par $k(x) = \dfrac{2x-8}{-4x+4}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-4x+4=0$.

$$\begin{aligned} -4x+4&=0\\ -4x&=-4\\ x&=\frac{-4}{-4} \end{aligned}$$

Or 1 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 0]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ 0]$.

$$k'(x) = \frac{2\times(-4x+4)-(2x-8)\times(-4)}{(-4x+4)^2} = \frac{-24}{(-4x+4)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(-4x+4)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-24<0$ donc pour tout x de I, $k'(x)<0$. Ainsi, on obtient

x	-10		0
$k'(x)$		$-$	
$k(x)$	$-\frac{7}{11}$	$\searrow$	-2

►2. Étudier le sens de variations de f définie par $f(x)=2x^3-3x^2-336x-5$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$f'(x)=6x^2-6x-336$
Je dois étudier le signe de $f'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta=(-6)^2-4\times 6\times(-336)=8\,100$ et $\sqrt{8\,100}=90$.
Comme $\Delta>0$, $f'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-6)-\sqrt{8\,100}}{2\times 6} &= \frac{6-\sqrt{8\,100}}{12}\\ &=\frac{6-90}{12}\\ &=\frac{-84}{12}\\ &=-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-6)+\sqrt{8\,100}}{2\times 6} &= \frac{6+\sqrt{8\,100}}{12}\\ &=\frac{6+90}{12}\\ &=\frac{96}{12}\\ &=8 \end{aligned}$$

Les racines de f' sont $x_1=-7$ et $x_2=8$.
Comme $\Delta>0$, $f'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-7		8		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de f.

x	-10		-7		8		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1\,055$	$\nearrow$	$1\,514$	$\searrow$	$-1\,861$	$\nearrow$	$-1\,665$

Corrigé de l'exercice 4

▶**1.** On considère la fonction g définie sur $I = [-10\ ;\ -1]$ par $g(t) = \dfrac{-2t-6}{-5t-2}$.

a) Justifier que g est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-5t-2=0$.

$$\begin{aligned} -5t-2 &= 0 \\ -5t &= 2 \\ t &= \frac{2}{-5} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{2}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ -1]$ et comme g est un quotient de polynômes, alors g est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ -1]$.

$$g'(t) = \frac{(-2)\times(-5t-2)-(-2t-6)\times(-5)}{(-5t-2)^2} = \frac{-26}{(-5t-2)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de g sur I.
Comme $(-5t-2)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-26<0$ donc pour tout t de I, $g'(t)<0$. Ainsi, on obtient

t	-10		-1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$\frac{7}{24}$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}$

▶**2.** Étudier le sens de variations de k définie par $k(x) = x^3-18x^2+108x+3$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$k'(x) = 3x^2-36x+108$
Je dois étudier le signe de $k'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-36)^2 - 4\times 3\times 108 = 0$.
Comme $\Delta = 0$, $k'(x)$ a une seule racine $x_0 = \dfrac{-(-36)}{2\times 3} = 6$.
Comme $\Delta = 0$, $k'(x)$ s'annule une seule fois pour $x_0 = 6$ et est toujours du signe de a.

x	-10		6		10
$k'(x)$		$+$	0	$+$	

Donc la fonction polynômiale k est croissante sur $[-10\ ;\ 10]$.