

equations inéquations

Correction 1

a.
$$\begin{aligned} (x-1)(2x+1) - (2x-2)(5-2x) \\ = (x-1)(2x+1) - 2(x-1)(5-2x) \\ = (x-1)[(2x+1) - 2(5-2x)] \\ = (x-1)(2x+1-10+4x) \\ = (x-1)(6x-9) \\ = 3(x-1)(2x-3) \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} (2+x)(3-x) + (5-2x)(3-x) \\ = [(2+x) + (5-2x)](3-x) \\ = [2+x+5-2x](3-x) \\ = (7-x)(3-x) \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 3(4+2x) - (3+x)(10+5x) \\ = 3[2(2+x)] - (3+x)[5(2+x)] \\ = 6(2+x) - 5(3+x)(2+x) \\ = [6-5(3+x)](2+x) \\ = (6-15-5x)(2+x) \\ = 5(-9-5x)(2+x) \\ = -(5x+9)(x+2) \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} (2-x)(3x-4) + \left(2-\frac{3}{2}x\right)(2x+3) \\ = (2-x)(3x-4) + \left[-\frac{1}{2}(-4+3x)\right](2x+3) \\ = (2-x)(3x-4) - \frac{1}{2}(-4+3x)(2x+3) \\ = \left[(2-x) - \frac{1}{2}(2x+3)\right](3x-4) \\ = \left(2-x-x-\frac{3}{2}\right)(3x-4) \\ = \left(\frac{1}{2}-2x\right)(3x-4) \end{aligned}$$

On pouvait trouver également $\left(2-\frac{3}{2}x\right)(4x-1)$ qui est une expression égale

e.
$$\begin{aligned} (2x+1)^2 - 4(2-3x)^2 \\ = (2x+1)^2 - [2(2-3x)]^2 \\ = [(2x+1) + 2(2-3x)][(2x+1) - 2(2-3x)] \\ = (2x+1+4-6x)(2x+1-4+6x) \\ = (5-4x)(8x-3) \end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned} 18x^2 - 24x + 8 + (3x-2)(2-x) \\ = 2(9x^2 - 12x + 4) + (3x-2)(2-x) \\ = 2(3x-2)^2 + (3x-2)(2-x) \\ = (3x-2)[2(3x-2) + (2-x)] \\ = (3x-2)(6x-4+2-x) \\ = (3x-2)(5x-2) \end{aligned}$$

Correction 2

1. a. Le tableau ci-dessous représente les quatre valeurs à étudier :

x	$x-5$	$x-2$	$(x-5)(x-2)$
6	+	+	+
4	-	+	-
1	-	-	+
-2	-	-	+

b. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$	
$x - 5$	—	—	0	+	
$x - 2$	—	0	+	+	
$(x - 5)(x - 2)$	+	0	—	0	+

2. a. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	0	$+$
$(2x+1)(x+2)$	$+$	0	$-$	$+$

On en déduit que l'inéquation $(2x+1)(x+2) < 0$ admet pour solution :

$$\mathcal{S} =]-2; -\frac{1}{2}[$$

b. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
$3-x$	$+$	$+$	0	$-$	
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$	
$(2x+1)(x+2)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi, l'inéquation $(3-x)(2x+1) \geq 0$ admet pour ensemble de solution :

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$$

c. On a la transformation algébrique suivante :

$$(5x+1)(2-x) > (3+x)(x-2)$$

$$(5x+1)(2-x) - (3+x)(x-2) > 0$$

$$(5x+1)(2-x) + (3+x)(2-x) > 0$$

$$(2-x)[(5x+1) + (3+x)] > 0$$

$$(2-x)(6x+4) > 0$$

L'expression de gauche admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	2	$+\infty$	
$2-x$	$+$	$+$	0	$-$	
$6x+4$	$-$	0	$+$	$+$	
$(2-x)(6x+4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi, l'équation admet pour ensemble de solutions :

$$\mathcal{S} = \left] -\frac{2}{3}; 2 \right[$$

d. On a les transformations algébriques suivantes :

$$(2x+6)(5-x) \leq (x+3)(2x-2)$$

$$(2x+6)(5-x) - (x+3)(2x-2) \leq 0$$

$$[2(x+3)](5-x) - (x+3)(2x-2) \leq 0$$

$$2(x+3)(5-x) - (x+3)(2x-2) \leq 0$$

$$(x+3)[2(5-x) - (2x-2)] \leq 0$$

$$(x+3)(10-2x-2x+2) \leq 0$$

$$(x+3)(-4x+12) \leq 0$$

L'expression du membre de gauche admet le tableau de signe suivante :

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$-4x+12$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+3)(-4x+12)$	$-$	0	$+$	$-$

L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; -3 \right] \cup \left[3; +\infty \right[$$

Correction 3

a. L'expression x^2+2x+4 admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 2^2 - 4 \times 1 \times 4$$

$$= 4 - 16$$

$$= -12$$

b. L'expression $2x^2+4x+1$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 4^2 - 4 \times 2 \times 1$$

$$= 16 - 8$$

$$= 8$$

c. L'expression x^2-2x+1 admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1$$

$$= 4 - 4$$

$$= 0$$

d. L'expression $-2x^2+2x+1$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 2^2 - 4 \times (-2) \times 1$$

$$= 4 + 8$$

$$= 12$$

e. L'expression x^2-x-1 admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)$$

$$= 1 + 4$$

$$= 5$$

f. L'expression $3x^2+x-2$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 1^2 - 4 \times 3 \times (-2)$$

$$= 1 + 24$$

$$= 25$$

Correction 4

a. L'expression $x^2+2x-35$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \times 1 \times (-35)$$

$$= 4 + 140 = 144$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{144} = 12$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux solutions :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{-2 - 12}{2} & = \frac{-2 + 12}{2} \\ = \frac{-14}{2} & = \frac{10}{2} \\ = -7 & = 5 \end{array}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\mathcal{S} = \{-7; 5\}$$

b. L'expression $2x^2-5x+2$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2$$

$$= 25 - 16 = 9$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux solutions :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{-(-5) - 3}{2 \times 2} & = \frac{-(-5) + 3}{2 \times 2} \\ = \frac{2}{4} & = \frac{8}{4} \\ = \frac{1}{2} & = 2 \end{array}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}$$

c. L'expression $5x^2-3x+2$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-3)^2 - 4 \times 5 \times 2$$

$$= 9 - 40 = -31$$

Le discriminant étant strictement négatif, on en déduit que cette équation n'admet pas de solution.

d. L'expression $9x^2-24x+16$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-24)^2 - 4 \times 9 \times 16$$

$$= 576 - 576 = 0$$

Le discriminant étant nul, on en déduit que l'équation n'admet qu'une seule solution :

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-24}{2 \times 9} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

e. L'expression $-2x^2+3x-5$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 3^2 - 4 \times (-2) \times (-5)$$

$$= 9 - 40 = -31$$

Le discriminant étant strictement négatif, on en déduit que cette équation n'admet pas de solution.

f. L'expression $-3x^2-x+4$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \times (-3) \times 4$$

$$= 1 + 48 = 49$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet deux solutions :

$$\begin{array}{lcl}
 x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 = \frac{-(-1) - 7}{2 \times (-3)} & & = \frac{-(-1) + 7}{2 \times (-3)} \\
 = \frac{-6}{-6} & & = \frac{8}{-6} \\
 = 1 & & = -\frac{4}{3}
 \end{array}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{4}{3}; 1 \right\}$$

Correction 5

- a. Le discriminant de l'expression $x^2 + 4x + 3$ a pour valeur :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4ac \\
 &= 4^2 - 4 \times 1 \times 3 \\
 &= 16 - 12 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux racines :

$$\begin{array}{lcl}
 x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 = \frac{-4 - 2}{2 \times 1} & & = \frac{-4 + 2}{2 \times 1} \\
 = \frac{-6}{2} & & = \frac{-2}{2} \\
 = -3 & & = -1
 \end{array}$$

Ainsi, cette expression admet la factorisation suivante :

$$x^2 + 4x + 3 = [x - (-3)][x - (-1)] = (x + 3)(x + 1)$$

- b. Le discriminant de l'expression $5x^2 - 4x - 1$ a pour valeur :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4ac \\
 &= (-4)^2 - 4 \times 5 \times (-1) \\
 &= 16 + 20 \\
 &= 36
 \end{aligned}$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux racines :

$$\begin{array}{lcl}
 x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 = \frac{-(-4) - 6}{2 \times 5} & & = \frac{-(-4) + 6}{2 \times 5} \\
 = \frac{4 - 6}{10} & & = \frac{4 + 6}{10} \\
 = \frac{-2}{10} & & = \frac{10}{10} \\
 = -\frac{1}{5} & & = 1
 \end{array}$$

Ainsi, cette expression admet la factorisation suivante :

$$\begin{aligned}
 5x^2 - 4x - 1 &= 5 \left[x - \left(-\frac{1}{5} \right) \right] [x - 1] \\
 &= (5x + 1)(x - 1)
 \end{aligned}$$

- c. Le discriminant de l'expression $3x^2 + 4x + 1$ a pour valeur :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4ac \\
 &= 4^2 - 4 \times 3 \times 1 \\
 &= 16 - 12 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux racines :

$$\begin{array}{lcl}
 x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 = \frac{-4 - 2}{2 \times 3} & & = \frac{-4 + 2}{2 \times 3} \\
 = \frac{-6}{6} & & = \frac{-2}{6} \\
 = -1 & & = -\frac{1}{3}
 \end{array}$$

Ainsi, cette expression admet la factorisation suivante :

$$\begin{aligned}
 3x^2 + 4x + 1 &= 3 \left[x - \left(-\frac{1}{3} \right) \right] [x - (-1)] \\
 &= 3 \left(x + \frac{1}{3} \right) (x + 1) \\
 &= (3x + 1)(x + 1)
 \end{aligned}$$

- d. Le discriminant de l'expression $4x^2 + 3x + 4$ a pour valeur :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4ac \\
 &= 3^2 - 4 \times 4 \times 4 \\
 &= 9 - 64 \\
 &= -55
 \end{aligned}$$

Le discriminant étant strictement négatif, cette expression n'admet pas de factorisation.

- e. Le discriminant de l'expression $x^2 + 4x + 1$ a pour valeur :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4ac \\
 &= 4^2 - 4 \times 1 \times 1 \\
 &= 16 - 4 \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux racines :

$$\begin{array}{lcl}
 x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2 \times 1} & & = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{2 \times 1} \\
 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} & & = -2 + \sqrt{3} \\
 = -2 - \sqrt{3} & &
 \end{array}$$

Ainsi, cette expression admet la factorisation suivante :

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x + 1 &= [x - (-2 - \sqrt{3})][x - (-2 + \sqrt{3})] \\
 &= (x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

- f. Le discriminant de l'expression $3x^2 + 3x + 4$ a pour valeur :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4ac \\
 &= 3^2 - 4 \times 3 \times 4 \\
 &= 9 - 48 \\
 &= -39
 \end{aligned}$$

Le discriminant étant strictement négatif, cette expression n'admet pas de factorisation.

Correction 6

- a. L'expression $2x^2 + x - 1$ admet pour discriminant :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4ac \\
 &= 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) \\
 &= 1 + 8 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

On a la simplification : $\sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que cette expression admet deux racines :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{-1 - 3}{2 \times 2} & = \frac{-1 + 3}{2 \times 2} \\ = \frac{-4}{4} & = \frac{2}{4} \\ = -1 & = \frac{1}{2} \end{array}$$

Le coefficient du second degré étant strictement positif, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x^2 + x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

b. L'expression $-3x^2 + 2x + 1$ admet pour discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 2^2 - 4 \times (-3) \times 1 \\ &= 4 + 12 \\ &= 16 \end{aligned}$$

On a la simplification : $\sqrt{16} = 4$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que cette expression admet deux racines :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{-2 - 4}{2 \times (-3)} & = \frac{-2 + 4}{2 \times (-3)} \\ = \frac{-6}{-6} & = \frac{2}{-6} \\ = 1 & = -\frac{1}{3} \end{array}$$

Le coefficient du second degré étant strictement négatif, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$-3x^2 + 2x + 1$	$-$	0	$+$	0	$-$

c. L'expression $2x^2 - 1$ admet l'écriture :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 1 &= (\sqrt{2}x)^2 - 1^2 \\ &= (\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1) \end{aligned}$$

Cette expression admet les deux racines :

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Le coefficient du second degré étant strictement positif, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$	
$2x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

d. L'expression $-x^2 - 4x - 1$ admet pour discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-4)^2 - 4 \times (-1) \times (-1) \\ &= 16 - 4 \\ &= 12 \end{aligned}$$

On a la simplification : $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que cette expression admet deux racines :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{-(-4) - 2\sqrt{3}}{2 \times (-1)} & = \frac{-(-4) + 2\sqrt{3}}{2 \times (-1)} \\ = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{-2} & = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} \\ = -2 + \sqrt{3} & = -2 - \sqrt{3} \end{array}$$

Le coefficient du second degré étant strictement négatif, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$	$-2+\sqrt{2}$	$+\infty$	
$-x^2-4x-1$	$-$	0	$+$	0	$-$

e. L'expression $-x^2 - x - 1$ admet pour discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \times (-1) \times (-1) \\ &= 1 - 4 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Le coefficient du second degré étant strictement négatif, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$-x^2 - x - 1$	$-$	$-$

f. L'expression $4x^2 - 3x - 1$ admet pour discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-3)^2 - 4 \times 4 \times (-1) \\ &= 9 + 16 \\ &= 25 \end{aligned}$$

On a la simplification : $\sqrt{25} = 5$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que cette expression admet deux racines :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{-(-3) - 5}{2 \times 4} & = \frac{-(-3) + 5}{2 \times 4} \\ = \frac{-2}{8} & = \frac{8}{8} \\ = -\frac{1}{4} & = 1 \end{array}$$

Le coefficient du second degré étant strictement positif, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	1	$+\infty$	
$4x^2 - 3x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Correction 7

a. Le polynôme $x^2 - 3x + 2$ a pour discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 \\ &= 9 - 8 = 1 \end{aligned}$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l}
 x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 = \frac{-(-3) - 1}{2 \times 1} & = \frac{-(-3) + 1}{2 \times 1} \\
 = \frac{2}{2} & = \frac{4}{2} \\
 = 1 & = 2
 \end{array}$$

Le coefficient du second degré étant positif, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
 $\mathcal{S} =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$

b. Le polynôme $x^2 - x - 2$ a pour discriminant :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) \\
 &= 1 + 8 = 9
 \end{aligned}$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l}
 x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 = \frac{-(-1) - 3}{2 \times 1} & = \frac{-(-1) + 3}{2 \times 1} \\
 = \frac{-2}{2} & = \frac{4}{2} \\
 = -1 & = 2
 \end{array}$$

Le coefficient du second degré étant positif, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
 $\mathcal{S} =]-1; 2[$

c. Le polynôme $-9x^2 + 12x - 4$ a pour discriminant :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 12^2 - 4 \times (-9) \times (-4) \\
 &= 144 - 144 = 0
 \end{aligned}$$

Le discriminant étant nul, ce polynôme admet une unique racine :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \times (-9)} = \frac{12}{18} = \frac{1}{3}$$

Puisque le coefficient du second degré de ce polynôme est négatif, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$-9x^2 + 12x - 4$	-	0	-

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
 $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

d. Le polynôme $5x^2 + 4x - 1$ a pour discriminant :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 4^2 - 4 \times 5 \times (-1) \\
 &= 16 + 20 = 36
 \end{aligned}$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l}
 x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 = \frac{-4 - 6}{2 \times 5} & = \frac{-4 + 6}{2 \times 5} \\
 = \frac{-10}{10} & = \frac{2}{10} \\
 = -1 & = \frac{1}{5}
 \end{array}$$

Le coefficient du second degré étant strictement positif, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{5}$	$+\infty$	
$5x^2 + 4x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
 $\mathcal{S} =]-1; \frac{1}{5}[$

e. Le polynôme $-4x^2 + 2x + 2$ a pour discriminant :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \times (-4) \times 2 \\
 &= 4 + 32 = 36
 \end{aligned}$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l}
 x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 = \frac{-2 - 6}{2 \times (-4)} & = \frac{-2 + 6}{2 \times (-4)} \\
 = \frac{-8}{-8} & = \frac{4}{-8} \\
 = 1 & = -\frac{1}{2}
 \end{array}$$

Le coefficient du second degré étant strictement négatif, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$-4x^2 + 2x + 2$	$-$	0	$+$	0

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
 $\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

f. Le polynôme $2x^2 + 4x - 2 > 0$ a pour discriminant :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 4^2 - 4 \times 2 \times (-2) \\
 &= 16 + 16 = 32
 \end{aligned}$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l}
 x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 = \frac{-4 - 4\sqrt{2}}{2 \times 2} & = \frac{-4 + 4\sqrt{2}}{2 \times 2} \\
 = \frac{-4 - 4\sqrt{2}}{4} & = \frac{-4 + 4\sqrt{2}}{4} \\
 = -1 - \sqrt{2} & = -1 + \sqrt{2}
 \end{array}$$

Le coefficient du second degré étant strictement positif, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$	
$2x^2+4x-2$	+	0	-	0	+

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :

$$S =]-\infty; -1-\sqrt{2}] \cup [-1+\sqrt{2}; +\infty[$$

Correction 8

1. Les antécédents de 0 de la fonction f , sont les nombres x qui vérifient la relation :

$$f(x) = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Ainsi, on recherche les racines du polynôme $x^2 + x - 2$. Ce polynôme admet le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) \\ &= 1 + 8 \\ &= 9\end{aligned}$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l}x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \hline= \frac{-1 - 3}{2 \times 1} & = \frac{-1 + 3}{2 \times 1} \\ \hline= \frac{-4}{2} & = \frac{2}{2} \\ \hline= -2 & = 1\end{array}$$

Ainsi, l'ensemble des antécédents de 0 par la fonction f est :

$$S = \{-2; 1\}$$

Les antécédents de 0 de la fonction g , sont les nombres x qui vérifient la relation :

$$g(x) = 0$$

$$-\frac{1}{4}x^2 - 2x - 2 = 0$$

Ainsi, on recherche les racines du polynôme $-\frac{1}{4}x^2 - 2x - 2$. Ce polynôme admet le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times (-2) \\ &= 4 - 2 = 2\end{aligned}$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l}x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \hline= \frac{-(-2) - \sqrt{2}}{2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)} & = \frac{-(-2) + \sqrt{2}}{2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)} \\ \hline= \frac{2 - \sqrt{2}}{-\frac{1}{2}} & = \frac{2 + \sqrt{2}}{-\frac{1}{2}} \\ \hline= -(2 - \sqrt{2}) \times 2 & = -(2 + \sqrt{2}) \times 2 \\ \hline= 2\sqrt{2} - 4 & = -2\sqrt{2} - 4\end{array}$$

Ainsi, l'ensemble des antécédents de 0 par la fonction f est :

$$S = \{2\sqrt{2} - 4; -2\sqrt{2} - 4\}$$

2. a. Les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ vérifient l'équation :

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 + x - 2 = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 2$$

$$x^2 + x - 2 - \left(-\frac{1}{4}x^2 - 2x - 2\right) = 0$$

$$x^2 + x - 2 + \frac{1}{4}x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$\frac{5}{4}x^2 + 3x = 0$$

$$x \cdot \left(\frac{5}{4}x + 3\right) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$x = 0 \quad \left| \quad \frac{5}{4}x + 3 = 0 \right.$$

$$\frac{5}{4}x = -3$$

$$x = -3 \times \frac{4}{5}$$

$$x = -\frac{12}{5}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$S = \left\{-\frac{12}{5}; 0\right\}$$

Déterminons les images de ces points par la fonction f :

$$f(0) = 0^2 + 0 - 2 = -2$$

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{12}{5}\right) &= \left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \left(-\frac{12}{5}\right) - 2 \\ &= \frac{144}{25} - \frac{60}{25} - \frac{50}{25} = \frac{144 - 60 - 50}{25} \\ &= \frac{144 - 110}{25} = \frac{34}{25}\end{aligned}$$

Ainsi, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ s'intersectent en deux points dont les coordonnées sont :

$$(0; -2) \quad ; \quad \left(-\frac{12}{5}; \frac{34}{25}\right)$$

- b. Pour savoir où la courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve sous la courbe $\mathcal{C}_g$, il suffit de résoudre l'inéquation :

$$f(x) \leq g(x)$$

$$x^2 + x - 2 \leq -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 2$$

$$\frac{5}{4}x^2 + 3x \leq 0$$

D'après la question précédente, on a les racines du polynôme de gauche. Le fait que son coefficient du second degré permettent d'obtenir le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{12}{5}$	0	$+\infty$	
$\frac{5}{4}x^2 + 3x$	+	0	-	0	+

Voici la position relative des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$:

$\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur l'ensemble :

$$\left]-\infty; -\frac{12}{5}\right[\cup \left]0; +\infty\right[$$

$\mathcal{C}_f$ est au dessous de $\mathcal{C}_g$ sur l'ensemble :

$$\left]-\frac{12}{5}; 0\right[$$

Correction 9

1. Le polynôme $4x^2 + 4x + 5$ admet pour discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4^2 - 4 \times 4 \times 5 \\ &= 16 - 80 \\ &= -64\end{aligned}$$

Ce discriminant étant strictement négatif, le polynôme n'admet aucune racine : sa courbe représentative n'intercepte pas l'axe des abscisses.

Le coefficient du second degré étant positive, sa courbe représentative est $\mathcal{C}_f$.

2. Le polynôme $-2x^2 - 2x + 3$ admet pour discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 3 \\ &= 4 + 24 \\ &= 28\end{aligned}$$

Ce discriminant étant strictement positif, le polynôme admet deux racines : sa courbe représentative intercepte l'axe des abscisses en deux points.

Le coefficient du second degré étant positive, sa courbe représentative est $\mathcal{C}_k$.

3. Le polynôme $2x^2 + 4x + 2$ admet pour discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4^2 - 4 \times 2 \times 2 \\ &= 16 - 16 \\ &= 0\end{aligned}$$

Ce discriminant étant nul, le polynôme admet une unique racine : sa courbe représentative intercepte l'axe des abscisses en un seul point.

Le coefficient du second degré étant positive, sa courbe représentative est $\mathcal{C}_h$.

4. Le polynôme $-x^2 - 1$ admet pour discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 0^2 - 4 \times (-1) \times (-1) \\ &= -4\end{aligned}$$

Ce discriminant étant strictement négatif, le polynôme n'admet aucune racine : sa courbe représentative n'intercepte pas l'axe des abscisses.

Le coefficient du second degré étant négatif, sa courbe représentative est $\mathcal{C}_j$.

5. Le polynôme $x^2 - 2x - 1$ admet pour discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) \\ &= 4 + 4 \\ &= 8\end{aligned}$$

Ce discriminant étant strictement positif, le polynôme admet deux racines : sa courbe représentative intercepte l'axe des abscisses en deux points.

Le coefficient du second degré étant négatif, sa courbe représentative est $\mathcal{C}_g$.

6. Le polynôme $-x^2 + 2x - 1$ admet pour discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 2^2 - 4 \times (-1) \times (-1) \\ &= 4 - 4 \\ &= 0\end{aligned}$$

Ce discriminant étant nul, le polynôme admet une unique racine : sa courbe représentative intercepte l'axe des ab-

scisses en un seul point.

Le coefficient du second degré étant négatif, sa courbe représentative est $\mathcal{C}_l$.

Correction 10

- a. Le polynôme $4x^2 + 4x + 5$ a son coefficient du second degré positif ; ainsi, cette expression admet un minimum atteint en :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times 4} = -\frac{1}{2}$$

La valeur de ce minimum a pour valeur :

$$\begin{aligned}4x^2 + 4x + 5 &= 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 5 \\ &= 4 \times \frac{1}{4} - 2 + 5 = 1 - 2 + 5 = 4\end{aligned}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4x^2 + 4x + 5$	$+\infty$	4	$+\infty$

- b. Le polynôme $-2x^2 - 2x + 3$ a son coefficient du second degré négatif ; ainsi, cette expression admet un maximum atteint en :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times (-2)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

La valeur de ce maximum a pour valeur :

$$\begin{aligned}-2x^2 - 2x + 3 &= -2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \\ &= -2 \times \frac{1}{4} + \frac{2}{2} + 3 = -\frac{1}{2} + 1 + 3 = \frac{7}{2}\end{aligned}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x^2 - 2x + 3$	$-\infty$	$\frac{7}{2}$	$-\infty$

- c. Le polynôme $2x^2 + 4x + 2$ a son coefficient du second degré positif ; ainsi, cette expression admet un minimum atteint en :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times 2} = -1$$

La valeur de ce minimum a pour valeur :

$$\begin{aligned}2x^2 + 4x + 2 &= 2 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) + 2 \\ &= 2 + 4 + 2 = 8\end{aligned}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$2x^2 + 4x + 2$	$+\infty$	8	$+\infty$

- d. Le polynôme $-4x^2 + 4x + 3$ a son coefficient du second degré négatif ; ainsi, cette expression admet un maximum atteint en :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-4)} = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$$

La valeur de ce maximum a pour valeur :

$$\begin{aligned} -4x^2 + 4x + 3 &= -4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \frac{1}{2} + 3 \\ &= -4 \times \frac{1}{4} + 2 + 3 = -1 + 2 + 3 = 4 \end{aligned}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-4x^2 + 4x + 3$	$-\infty$	4	$+\infty$

- e. Le polynôme $2x^2 + 3x + 1$ a son coefficient du second degré positif; ainsi, cette expression admet un minimum atteint en :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \times 2} = -\frac{3}{4}$$

La valeur de ce minimum a pour valeur :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x + 1 &= 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{3}{4}\right) + 1 \\ &= 2 \times \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 1 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 1 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 1 \\ &= \frac{9}{8} - \frac{18}{8} + \frac{8}{8} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
$2x^2 + 3x + 1$	$+\infty$	$-\frac{1}{8}$	$+\infty$

- f. Le polynôme $-4x^2 - 4x - 1$ a son coefficient du second degré négatif; ainsi, cette expression admet un maximum atteint en :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times (-4)} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

La valeur de ce maximum a pour valeur :

$$\begin{aligned} -4x^2 - 4x - 1 &= -4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \\ &= -4 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-4x^2 - 4x - 1$	$-\infty$	0	$-\infty$