Exercice 1

▶**1.** À partir du tableau de variation ci-dessous, recopier et compléter les égalités ou inégalités suivantes en justifiant :

a) $f\,(5{,}2)\ldots f\,(5{,}7)$ | **b)** $f\,(-4{,}8)\ldots f\,(-4{,}4)$ | **c)** $f\,(-2{,}5)\ldots f\,(0{,}2)$

▶**2.** Peut-on comparer l'image des nombres $2,4$ et $-4,7$? Justifier.

▶**3.** Peut-on comparer l'image des nombres $-4,5$ et $6,8$? Justifier.

x	-5	-4	-1	2	5	6	7
$f\,(x)$	-3	-5	0	7	0	0	-2

Exercice 2

▶**1.** À partir du tableau de variation ci-dessous, recopier et compléter les égalités ou inégalités suivantes en justifiant :

a) $f\,(5{,}1)\ldots f\,(5{,}7)$ | **b)** $f\,(4{,}1)\ldots f\,(4{,}6)$ | **c)** $f\,(-0{,}7)\ldots f\,(-0{,}3)$

▶**2.** Peut-on comparer l'image des nombres $-4,7$ et $-0,8$? Justifier.

▶**3.** Peut-on comparer l'image des nombres $3,6$ et $5,9$? Justifier.

x	-6	-4	-1	0	3	4	5	6
$f\,(x)$	-3	0	6	6	0	-1	0	-2

Exercice 3

Déterminer les racines des polynômes :

$P\,(x) = -6 + 6\,x - x^2$ $\quad$ $Q\,(x) = -5\,x^2 - 6\,x$ $\quad$ $R\,(x) = 49 - 14\,x + x^2$

Exercice 4

Déterminer les racines des polynômes :

$P\,(x) = 14\,x - x^2 - 1$ $\quad$ $Q\,(x) = -x + 4\,x^2$ $\quad$ $R\,(x) = 9 + 6\,x^2$

Exercice 5

▶**1.** On considère la fonction k définie sur $I = [-10\ ;\ 1]$ par $k(t) = \dfrac{t+1}{4t-6}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 1]$.

c) En déduire le sens de variations de k sur I.

▶**2.** Étudier le sens de variations de f définie par $f(x) = 3x^3 + 18x^2 - 108x - 3$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

Exercice 6

►**1.** On considère la fonction f définie sur $I = [-10\ ;\ 0]$ par $f(t) = \dfrac{4t-8}{5t-5}$.

- **a)** Justifier que f est définie et dérivable sur I.
- **b)** Déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 0]$.
- **c)** En déduire le sens de variations de f sur I.

►**2.** Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = x^3 + 3x^2 - 144x + 8$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

Corrigé de l'exercice 1

▶**1.** **a)** $f(5{,}2) = f(5{,}7)$ car $5{,}2 < 5{,}7$ et f est constante sur $[5\ ;\ 6]$.

b) $f(-4{,}8) > f(-4{,}4)$ car $-4{,}8 < -4{,}4$ et f est décroissante sur $[-5\ ;\ -4]$.

c) $f(-2{,}5) < f(0{,}2)$ car $-2{,}5 < 0{,}2$ et f est croissante sur $[-4\ ;\ 2]$.

▶**2.** $f(2{,}4) > f(-4{,}7)$ car d'après le signe de la fonction $f(2{,}4) > 0$ et $f(-4{,}7) < 0$ (par contre, on ne peut pas utiliser le sens de variation qui change sur l'intervalle $[-4{,}7\ ;\ 2{,}4]$).

▶**3.** On ne peut pas comparer $f(-4{,}5)$ et $f(6{,}8)$ car la fonction f n'est pas monotone (elle change de sens de variation) sur $[-4{,}5\ ;\ 6{,}8]$.

Corrigé de l'exercice 2

▶**1.** **a)** $f(5{,}1) > f(5{,}7)$ car $5{,}1 < 5{,}7$ et f est décroissante sur $[5\ ;\ 6]$.

b) $f(4{,}1) < f(4{,}6)$ car $4{,}1 < 4{,}6$ et f est croissante sur $[4\ ;\ 5]$.

c) $f(-0{,}7) = f(-0{,}3)$ car $-0{,}7 < -0{,}3$ et f est constante sur $[-1\ ;\ 0]$.

▶**2.** $f(-4{,}7) < f(-0{,}8)$ car d'après le signe de la fonction $f(-4{,}7) < 0$ et $f(-0{,}8) > 0$ (par contre, on ne peut pas utiliser le sens de variation qui change sur l'intervalle $[-4{,}7\ ;\ -0{,}8]$).

▶**3.** On ne peut pas comparer $f(3{,}6)$ et $f(5{,}9)$ car la fonction f n'est pas monotone (elle change de sens de variation) sur $[3{,}6\ ;\ 5{,}9]$.

Corrigé de l'exercice 3

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -x^2 + 6x - 6$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = -1$, $b = 6$ et $c = -6$:

$$\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-6)$$
$$\Delta = 36 - 24$$
$$\Delta = 12$$

$$x_1 = \frac{-6-\sqrt{12}}{2\times(-1)} \qquad x_2 = \frac{-6+\sqrt{12}}{2\times(-1)}$$
$$x_1 = \frac{-6-\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{-2} \qquad x_2 = \frac{-6+\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{-2}$$
$$x_1 = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = 3+\sqrt{3} \qquad x_2 = 3-\sqrt{3}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{3+\sqrt{3}}$ et $\boxed{3-\sqrt{3}}$

$$Q(x) = -5x^2 - 6x$$
$$= -x \times (5x+6)$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{-6}{5}}$

$$R(x) = x^2 - 14x + 49$$
$$= x^2 - 2\times x\times 7 + 7^2$$
$$= (x-7)^2$$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{7}$

Corrigé de l'exercice 4

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -x^2 + 14x - 1$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = -1$, $b = 14$ et $c = -1$:

$$\Delta = 14^2 - 4 \times (-1) \times (-1)$$
$$\Delta = 196 - 4$$
$$\Delta = 192$$

$$x_1 = \frac{-14-\sqrt{192}}{2\times(-1)} \qquad x_2 = \frac{-14+\sqrt{192}}{2\times(-1)}$$
$$x_1 = \frac{-14-\sqrt{64}\times\sqrt{3}}{-2} \qquad x_2 = \frac{-14+\sqrt{64}\times\sqrt{3}}{-2}$$
$$x_1 = \frac{\left(7+4\sqrt{3}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{\left(7-4\sqrt{3}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = 7+4\sqrt{3} \qquad x_2 = 7-4\sqrt{3}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{7+4\sqrt{3}}$ et $\boxed{7-4\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 4x^2 - x \\ &= -x \times (-4x+1) \end{aligned}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

$R(x) = 6x^2 + 9$
$R(x) \geq 9$ car un carré est toujours positif.
$R(x)$ n'a donc pas de racine.

Corrigé de l'exercice 5

►**1.** On considère la fonction k définie sur $I = [-10\ ;\ 1]$ par $k(t) = \dfrac{t+1}{4t-6}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $4t - 6 = 0$.

$$\begin{aligned} 4t - 6 &= 0 \\ 4t &= 6 \\ t &= \frac{6}{4} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{3}{2}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 1]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 1]$.

$$k'(t) = \frac{11 \times (4t-6) - (t+1) \times 4}{(4t-6)^2} = \frac{-10}{(4t-6)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(4t-6)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-10 < 0$ donc pour tout t de I, $k'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	-10 1
$k'(x)$	$-$
$k(x)$	$\dfrac{9}{46}$ ↘ -1

►**2.** Étudier le sens de variations de f définie par $f(x) = 3x^3 + 18x^2 - 108x - 3$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$f'(x) = 9x^2 + 36x - 108$
Je dois étudier le signe de $f'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 36^2 - 4 \times 9 \times (-108) = 5\,184$ et $\sqrt{5\,184} = 72$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-36-\sqrt{5\,184}}{2\times 9} &= \frac{-36-\sqrt{5\,184}}{18} \\ &= \frac{-36-72}{18} \\ &= \frac{-108}{18} \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-36+\sqrt{5\,184}}{2\times 9} &= \frac{-36+\sqrt{5\,184}}{18} \\ &= \frac{-36+72}{18} \\ &= \frac{36}{18} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Les racines de f' sont $x_1 = -6$ et $x_2 = 2$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-6		2		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de f.

x	-10		-6		2		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-123	$\nearrow$	645	$\searrow$	-123	$\nearrow$	$3\,717$

Corrigé de l'exercice 6

►1. On considère la fonction f définie sur $I = [-10~;~0]$ par $f(t) = \dfrac{4t-8}{5t-5}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $5t - 5 = 0$.

$$\begin{aligned} 5t - 5 &= 0 \\ 5t &= 5 \\ t &= \frac{5}{5} \end{aligned}$$

Or 1 n'est pas dans l'intervalle $[-10~;~0]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [-10~;~0]$.

$$f'(t) = \frac{4 \times (5t-5) - (4t-8) \times 5}{(5t-5)^2} = \frac{20}{(5t-5)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(5t-5)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $20 > 0$ donc pour tout t de I, $f'(t) > 0$.

t	-10		0
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{48}{55}$	$\nearrow$	$\frac{8}{5}$

►2. Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = x^3 + 3x^2 - 144x + 8$ sur $[-10~;~10]$.
$g'(x) = 3x^2 + 6x - 144$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-144) = 1\,764$ et $\sqrt{1\,764} = 42$.

Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-6-\sqrt{1\,764}}{2\times 3} &= \frac{-6-\sqrt{1\,764}}{6}\\ &= \frac{-6-42}{6}\\ &= \frac{-48}{6}\\ &= -8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-6+\sqrt{1\,764}}{2\times 3} &= \frac{-6+\sqrt{1\,764}}{6}\\ &= \frac{-6+42}{6}\\ &= \frac{36}{6}\\ &= 6\end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = -8$ et $x_2 = 6$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-8		6		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	-10		-8		6		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	748	$\nearrow$	840	$\searrow$	-532	$\nearrow$	-132