DERIVATION ETUDE DE FONCTIONS

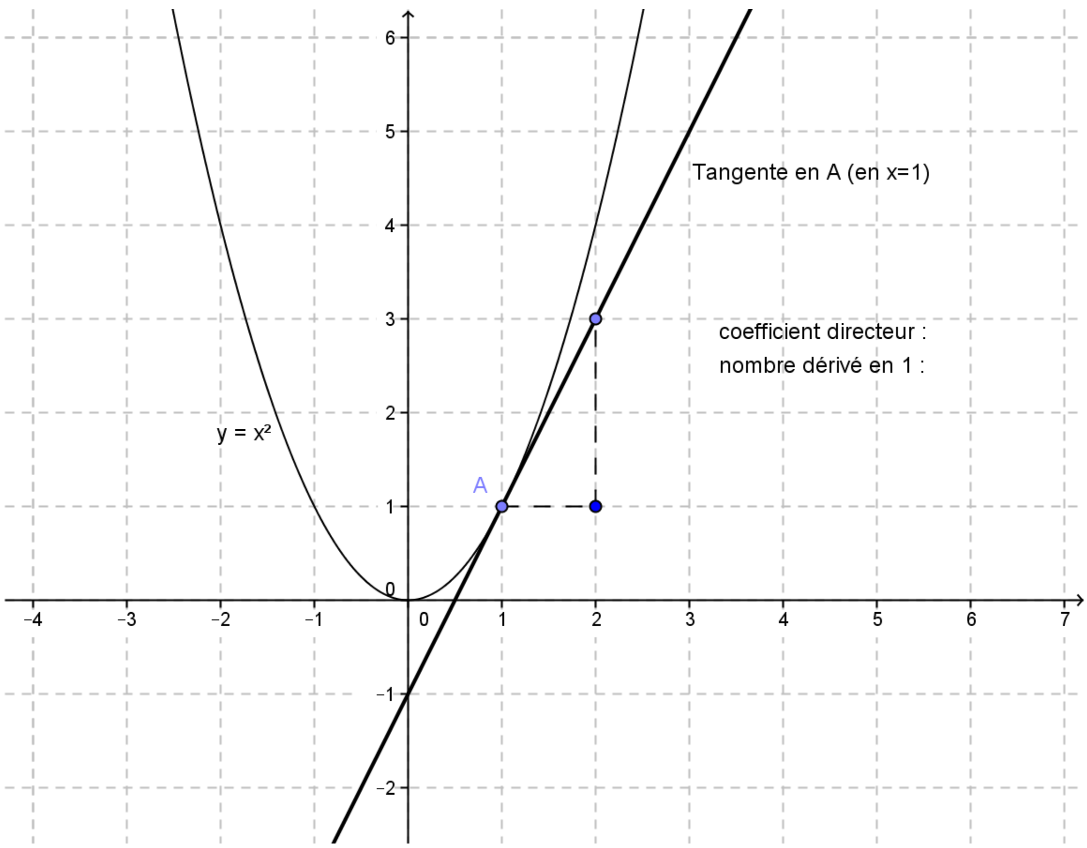
Objectifs :
- *savoir lire une courbe*
- *savoir dériver les fonctions polynômes*
- *savoir le lien : signe dérivée/variations fonction*
- *savoir trouver le signe d'une dérivée (pour faire le tableau des variations de f)*
- *savoir interpréter le tableau de variations (notamment pour trouver un extremum)*

Applications : variations, maximum, minimum, pb de couts, de vitesse…

I. INTRO : NOMBRE DERIVE, TANGENTE

En classe de première on a établi que le **coefficient directeur** de la tangente en un point d'une courbe représentait le **nombre dérivé** de la fonction en ce point.

Exemple :
Au point (1 ; 1), la tangente a comme coefficient directeur 2, car pour relier les points (1 ; 1) et (2 ; 3) de cette droite, il faut se déplacer d'une unité vers la droite et 2 unités vers le haut.
On dit que 2 est *le **nombre dérivé** de la fonction f, en x = 1, de la fonction* f(x) = x^2,



II. DERIVEES DES FONCTIONS POLYNOMES :

1) Calculs de dérivées type x^{n}

Si f(x) est égal à :	Alors sa dérivée f'(x) =
$k\ (nombre\ fixé)$	
x	
$ax + b$	
x^2	
x^3	
x^n	
$\frac{1}{x}$	

2) Opérations sur les dérivées :

Si f(x) est égal à :	Alors sa dérivée f'(x) =
$k \times u(x)$ où k $est\ un\ nombre\ fixé$	
$u(x) + v(x)$	

Exemples :

III. SENS DE VARIATION, ETUDE DES FONCTIONS :

1) Propriété :

- si la dérivée d'une fonction est **positive** sur un intervalle, alors la fonction est **croissante** sur cet intervalle : **si f'(x) ≥ 0 , alors f(x) croissante**
- si la dérivée d'une fonction est **négative** sur un intervalle, alors la fonction est **décroissante** sur cet intervalle ; **si f'(x) ≤ 0, alors f(x) croissante**

Exemples : $f(x) = 2x + 3$ $g(x) = -2x + 3$

$f'(x) =$ $g'(x) =$

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

x	
$g'(x)$	
$g(x)$	

PROPRIETE :

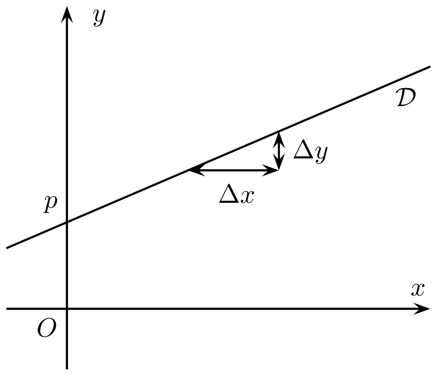
Si la **dérivée s'annule** et **change de signe** $en\ x = a$, on a l'existence de **maximum** ou minimum en a.

Cf ci-dessous :

Petit retour sur les équations de droites

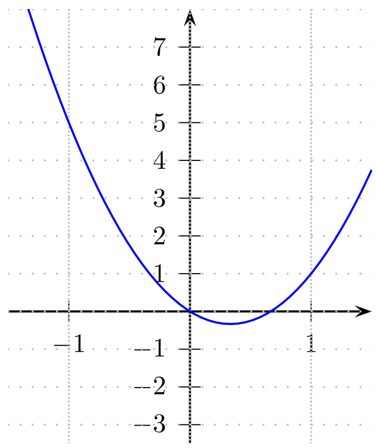
Une droite a une équation de la forme $y = mx + p$.

- m est le **"coefficient directeur"** ou la **"pente"** de la droite d. Sur un graphique : $pente = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- p est **l'ordonnée à l'origine de la droite** : la droite coupe l'axe des ordonnées "en p", ou "au point de coordonnées $(0;p)$"



Pour calculer p quand on connait m, on utilise les coordonnées d'un des points de la droite.

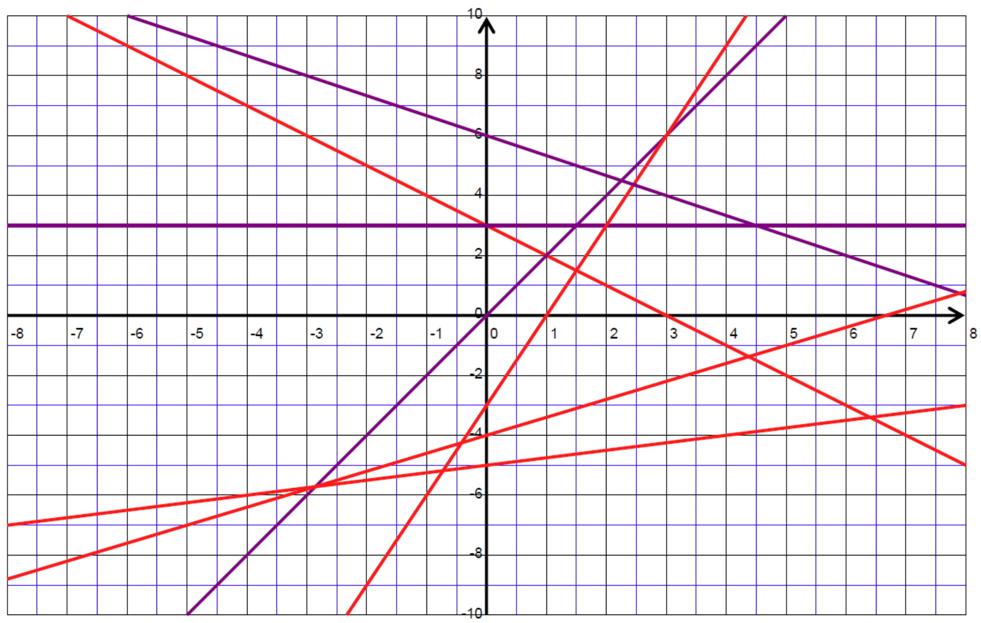
Exemple



Ci-contre est représentée la courbe de la fonction

$$j(x) = 3x^2 - 2x \text{ sur } [-1;2]$$

1. Calculer $j'(x)$; en déduire $j'(-1)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de j au point d'abscisse -1.



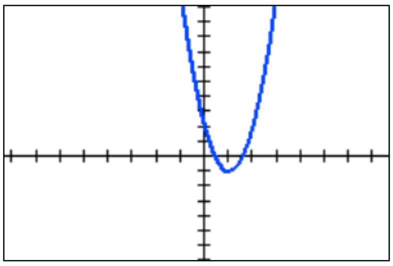
IV) Fonctions polynômes

I. Fonctions polynômes du second degré

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$.
1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.

Avant tout, il est utile de tracer la courbe représentative de la fonction f à l'aide de la calculatrice. Cela permettra de vérifier au fur et à mesure les résultats.



Si $f(x) = ax^2 + bx + c$
Alors $f'(x) = 2ax + b$

Théorème :
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante.

La fonction f admet un minimum égal à -1 en $x = 1$.

II. Fonctions polynômes du troisième degré

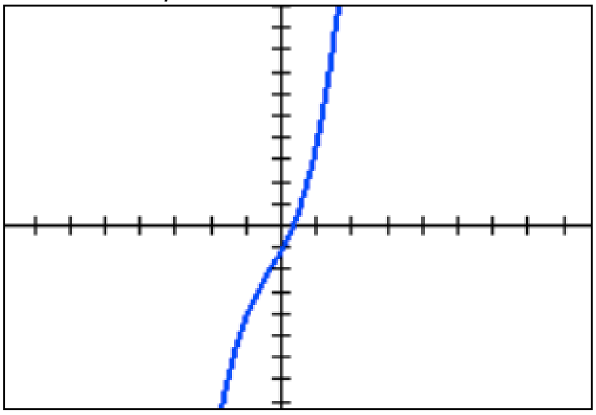
Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du troisième degré

EXEMPLE 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + 3x - 1$.

1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.

On trace la courbe de la fonction f à l'aide de la calculatrice :



Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Alors $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

EXEMPLE 2

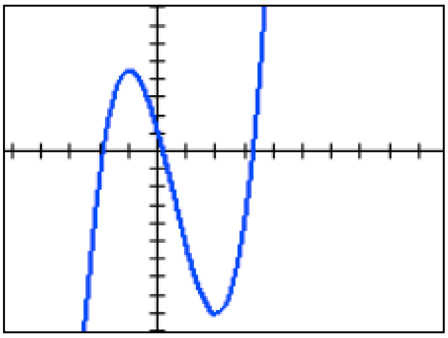
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 1$.

1) Calculer la fonction dérivée de f.

2) Déterminer le signe de f ' en fonction de x.

3) Dresser le tableau de variations de f.

On trace courbe de la fonction f à l'aide de la calculatrice :

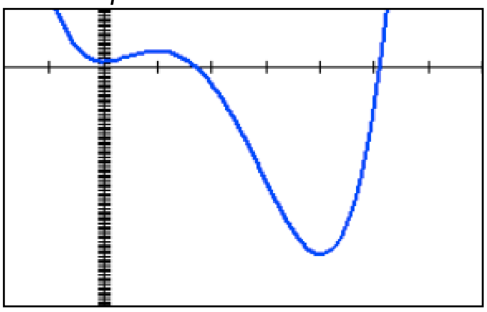


III. Fonctions polynômes du quatrième degré

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du quatrième degré

Soit la fonction f définie sur [0 ; 5] par $f(x) = 1,5x^4 - 10x^3 + 12x^2 + 2$.
1) Démontrer que $f'(x) = 6x(x-1)(x-4)$.
2) Déterminer le signe de f ' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) En déduire le minimum et le maximum de f sur [0 ; 5].

On trace la courbe de la fonction f à l'aide de la calculatrice :



Si $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
Alors $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

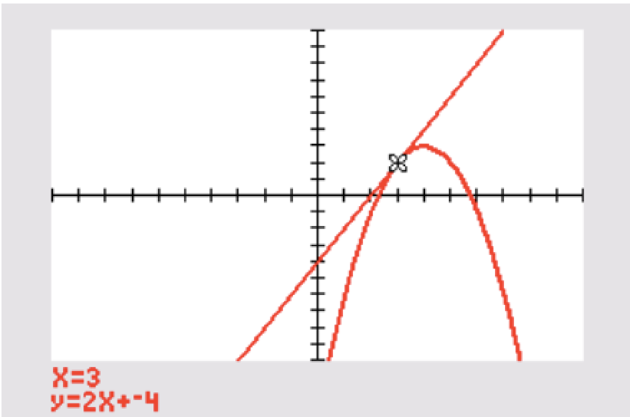
2. Tangente en un point de la courbe

Méthode : Déterminer avec la calculatrice une équation d'une tangente à une courbe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 8x - 13$.
A est un point de la courbe d'abscisse 3.

1) Donner une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A.
2) Tracer la tangente en A.

1) À l'aide de la calculatrice, il est possible de tracer la tangente à une courbe en un point et d'afficher son équation.



Une fois la courbe tracée sur la calculatrice, saisir :

Sur TI: Touches « 2nde » + « PGRM » (Dessin) puis « 5: Tangente » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 3. Puis « ENTER ».

Sur Casio : Touches « SHIFT » + « F4 » (Skech) puis « Tang » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 3. Puis « EXE » + « EXE ».

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse 3 est $y = 2x - 4$.

2) On a l'équation de la tangente :

$$y = 2x - 4$$

- -4 est son ordonnée à l'origine.
- 2 est son coefficient directeur.

Pour la fonction, 2 est le nombre dérivé.

Et on a : $f'(3) = 2$

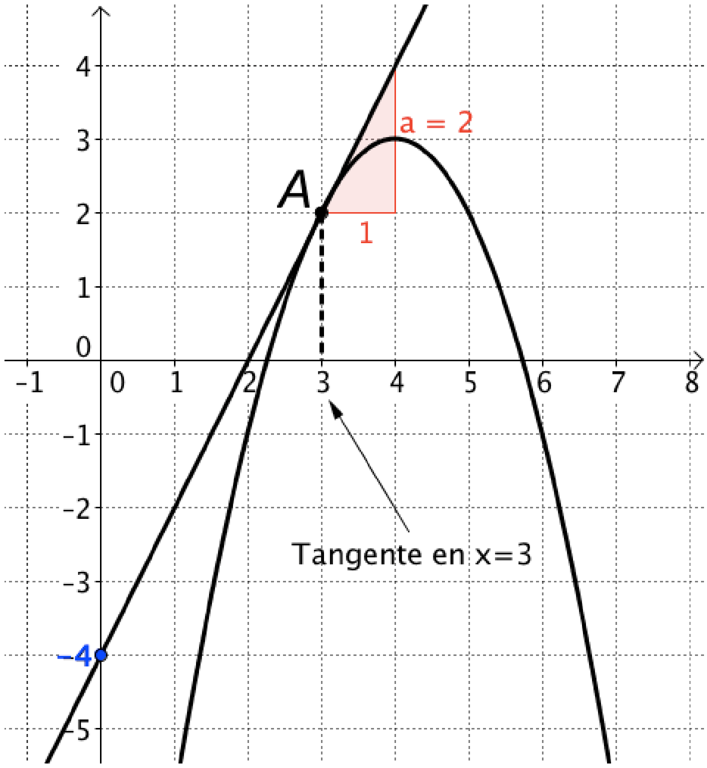
On peut ainsi retrouver le coefficient directeur de la tangente par calcul :

$f(x) = -x^2 + 8x - 13$

$f'(x) = -2x + 8$

Le nombre dérivé en 3 est :

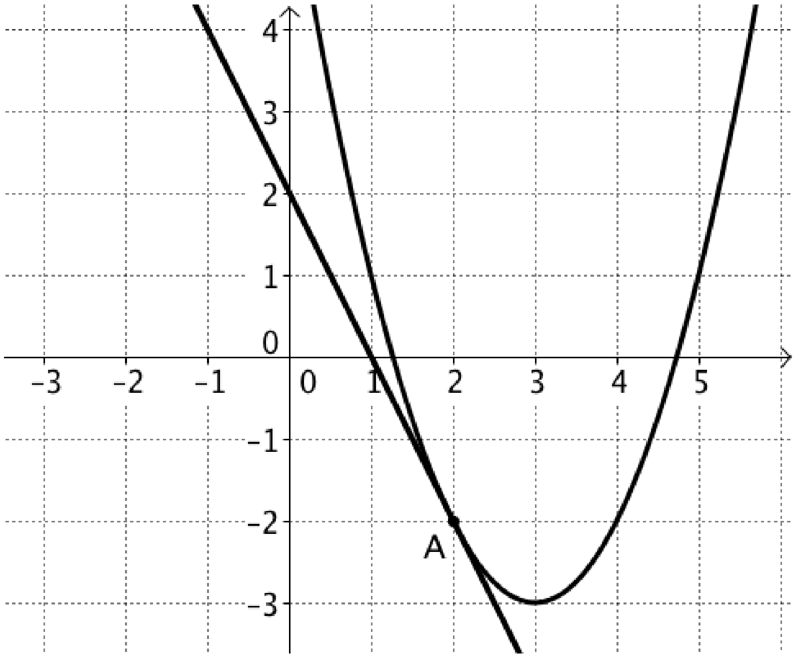
$f'(3) = -2 \times 3 + 8 = 2$



Méthode : Déterminer graphiquement une équation d'une tangente à une courbe

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.
On a représenté sa tangente au point A d'abscisse 2.

1) Déterminer le nombre dérivé de f en $x = 2$.
2) En déduire une équation de la tangente au point A d'abscisse 2.



V FONCTIONS RATIONNELLES

I. Dérivées des fonctions rationnelles

1) Fonction inverse

Méthode : Dériver la fonction inverse

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = 5x^3 + \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = 3x^2 - \frac{1}{x}$ $\quad h(x) = -6x^2 + 5x + \frac{4}{x}$

$$f'(x) = 5 \times 3x^2 - \frac{1}{x^2}$$
$$= 15x^2 - \frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = 3 \times 2x + \frac{1}{x^2}$$
$$= 6x + \frac{1}{x^2}$$

Si $f(x) = \frac{1}{x}$

Alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$h'(x) = -6 \times 2x + 5 - \frac{4}{x^2}$$
$$= -12x + 5 - \frac{4}{x^2}$$

2) Fonctions rationnelles

Méthode : Dériver des fonctions rationnelles

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$ $\quad$ b) $g(x) = \frac{2x-5}{x}$ $\quad$ c) $h(x) = \frac{6x-5}{x^2-1}$

a) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x + 1 \rightarrow u'(x) = 1$

$v(x) = x - 5 \rightarrow v'(x) = 1$

Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

Alors $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

Donc :

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

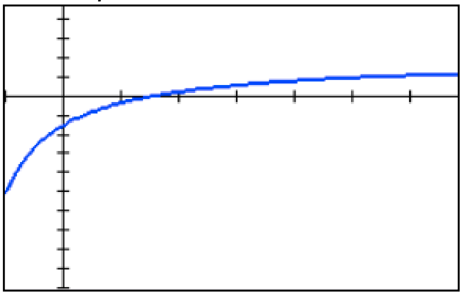
II. Variations des fonctions rationnelles

Méthode : Étudier les variations d'une fonction rationnelle

Soit la fonction *f* définie sur [-1 ; 5] par $f(x)=\frac{2x-3}{x+2}$.

1) Calculer la fonction dérivée de *f*.
2) Déterminer le signe de *f* '.
3) Dresser le tableau de variations de *f*.
4) a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de *f* en $x=0$.
   b) Tracer la courbe et la tangente.
5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$. Vérifier par calcul.

On trace la courbe de la fonction *f* à l'aide de la calculatrice :



$u(x)$

b)