STMG Métropole-La Réunion

16 juin 2016

Durée : 3 heures

Exercice 1 **4 points**

Partie A

1. La tangente a pour équation $y = f'(4)(x-4)+18$.

   Or, à partir du tableau, on lit $f(4) = 18$ et $f'(4) = 0$.

   Donc la tangente a pour équation $y = 0 \times (x-4)+18 = 18$. C'est la $\boxed{\text{réponse } \mathbf{c}}$.

2. Ici, il faut étudier laquelle des expressions est une fonction qui vérifie le tableau de signes de f'.

   Toutes les expressions proposées sont des fonctions trinomiale, de la forme ax^2+bx+c, nous allons donc nous intéresser :

   - aux racines qui doivent être 1 et 4
   - au signe de a qui doit être négatif.

   La seconde condition permet de ne conserver que les propositions a et c. On calcule le discriminant de l'expression a :

   $\Delta_a = 15^2 - 4 \times (-12) \times (-3) = 81$. Les racines sont donc :

   $$\left\{\begin{array}{rcccl} r_1 & = & \dfrac{-15-\sqrt{81}}{2\times(-3)} & = & 4 \\ r_2 & = & \dfrac{-15+\sqrt{81}}{2\times(-3)} & = & 1 \end{array}\right.$$

   Cela convient bien. On valide la $\boxed{\text{réponse } \mathbf{a}}$.

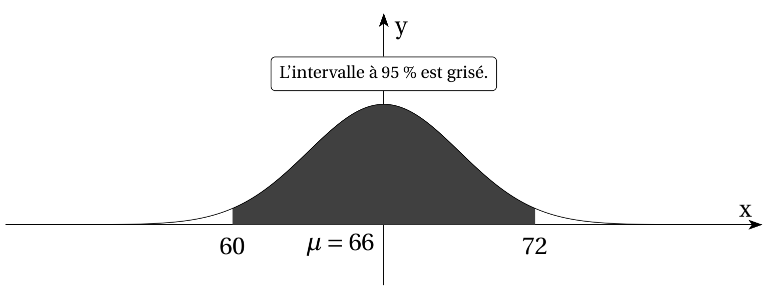
Partie B

1. L'intervalle $[60~;~72]$ est centré sur $\mu = 66$ et comme la probabilité d'appartenir à cet intervalle est de 95 %, on en déduit que sa largeur est environ 4σ.

   On obtient donc $\sigma \simeq \dfrac{12}{4} = 3$. C'est la $\boxed{\text{réponse } \mathbf{a}}$.

2. Le problème revient à chercher $P(X \leqslant 60)$ car le candidat échoue lorsque son score est inférieur à 60.

   Cette question était moins évidente car, en utilisant la calculatrice et $\sigma = 3$, aucune des réponses ne convenait. Ici, il fallait se souvenir des propriétés de la courbe en cloche qui possède une symétrie autour de la droite d'équation $x = \mu$.
   Faisons un dessin pour visualiser la situation :



   Il y a donc 5 % des probabilités « dans les extrémités ».

   On en déduit, par symétrie, que $P(X \leqslant 60) = 0,025$. C'est la $\boxed{\text{réponse } \mathbf{d}}$.

Exercice 2 — 4 points

Partie A

1. u_0 et u_{12} correspondent aux nombres de voitures produites sur le site A en 2015 et en $2015+12=2027$.
   On en déduit $u_0 = 42\,000$ et $u_{12} = 0$.

2. u est une suite arithmétique donc on cherche la raison r.

   On a $u_{12} = u_0 + 12r$ donc $12r = u_{12} - u_0$ soit $r = \dfrac{0-42000}{12} = -3\,500$.

   La production doit donc diminuer de $\boxed{3\,500}$ véhicules par an.

Partie B

1. Augmenter de 5 % revient à multiplier par $1+0,05 = 1,05$.

   La raison est donc $\boxed{q = 1,05}$ et le premier terme est $\boxed{v_0 = 53\,000}$.

2. On a $\boxed{v_n = 53\,000 \times 1,05^n}$

3. On applique la formule précédente avec $n=1$ puis $n=2$.

   On obtient : $\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} v_1 & = & 55\,650 \\ v_2 & \simeq & 58\,433 \end{array}\right.}$ qui correspondent à la production sur le site B en 2016 et 2017.

4. L'algorithme calcule les valeurs successives de v_k et s'arrête dès que $v_k \geqslant 95\,000$ puis affiche k.

   Il permet donc de déterminer le nombre d'années nécessaires à ce que la production sur le site B dépasse 95 000 véhicules.

Exercice 3 — 5 points

Partie A

1. Avec la calculatrice, on obtient l'équation de la droite de régression affine $\boxed{y = -9,52x + 574,01}$ avec les coefficients arrondis au centième.

2. Le point A d'abscisse 0 sur la droite D a pour ordonnée $y = -9,5 \times 0 + 574 = 574$.

   Le point B d'abscisse 10 sur la droite D a pour ordonnée $y = -9,5 \times 10 + 574 = 479$.

   On place A et B puis on trace $D = (AB)$.

3. 2016 correspond à $x = 2016 - 2004 + 1 = 13$.

   On évalue donc les émissions à $y = -9,5 \times 13 + 574 = 450,5$, soit $\boxed{450,5}$ millions de tonnes selon l'hypothèse d'ajustement affine.

Partie B

1. On calcule $\dfrac{490,01 - 557,21}{557,21} \simeq -0,1206$, soit une baisse globale de $\boxed{-12,06\ \%}$ entre 2004 et 2011.

2. Le coefficient multiplicateur global vaut $C_g = \dfrac{490,01}{557,21} \simeq 0,8794$.

   Or le taux annuel moyen t sur les sept périodes vérifie $(1+t)^7 = C_g = \dfrac{490,01}{557,21}$.

   On en déduit $(1+t) = \left(\dfrac{490,01}{557,21}\right)^{\frac{1}{7}}$, soit $t = \left(\dfrac{490,01}{557,21}\right)^{\frac{1}{7}} - 1$. Après calcul, on obtient $\boxed{t = -1,82\ \%}$.

   Une autre méthode consistait à vérifier que $(1-0,0182)^7$ correspondait bien au coefficient multiplicateur global.

3. Entre 2011 et 2016, il s'écoule cinq années. Or chaque année, selon cette hypothèse, on multiplie la quantité par $(1-0,0182) = 0,9818$.

   On obtient donc une quantité émise en 2016, selon cette hypothèse, égale à $\boxed{490,01 \times 0,9818^5 \simeq 447,01}$ millions de tonnes.

Exercice 4 **7 points**

Partie A

1. Graphiquement, on vérifie que $f(10) < 70$. L'objectif n'est donc pas atteint.
2. Graphiquement, on lit qu'il faut $\boxed{\text{4 semaines}}$ pour passer de 50 % à 60 %.
3. Pour tout $x \in [0\,;\,15]$, on a $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 75x$ et $v(x) = x+2$.

   On doit donc calculer $u'(x) = 75$ et $v'(x) = 1$.

   Finalement :

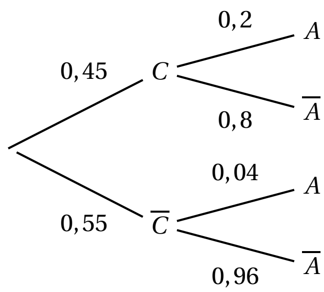
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} = \frac{75(x+2) - 1 \times 75x}{(x+2)^2} = \frac{75x + 150 - 75x}{(x+2)^2} = \frac{150}{(x+2)^2}$$

4. Le numérateur et le dénominateur de $f'(x)$ sont positifs pour tout $x \in [0\,;\,15]$. On en déduit que f' est positive et, par suite, la fonction f est $\boxed{\text{croissante sur son ensemble de définition}}$.
5. On calcule $f(15) \simeq 66{,}18 < 70$. L'objectif n'est donc toujours pas atteint au bout de 15 semaines.
6. On fait un tableau de valeurs de la fonction f. L'objectif est atteint au bout de $\boxed{\text{28 semaines}}$.

   Sinon, on pouvait aussi résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 70 \iff \dfrac{75x}{x+2} \geqslant 70 \iff 70(x+2) \leqslant 75x$ mais c'était nettement plus délicat.

Partie B

1. On calcule $p(C) = \dfrac{f(3)}{100} = 0{,}45$ puis on complète l'arbre en utilisant le fait que la somme des probabilités issues d'un nœud vaut 1.



2. On cherche $p(C \cap A) = p(C) \times p_C(A)$.

   On obtient $\boxed{p(C \cap A) = 0{,}45 \times 0{,}2 = 0{,}09}$.
3. On utilise la formule des probabilités totales :

$$p(A) = p(C \cap A) + p\left(\overline{C} \cap A\right)$$

   Une application numérique donne bien $\boxed{p(A) = 0{,}09 + 0{,}55 \times 0{,}04 = 0{,}09 + 0{,}022 = 0{,}112}$
4. La fréquence de personnes prêtes à acheter la boisson dans l'échantillon est de $\dfrac{44}{500} = 0{,}088$.

   On va déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence de personnes prêtes à acheter la boisson sur un échantillon de taille 500.

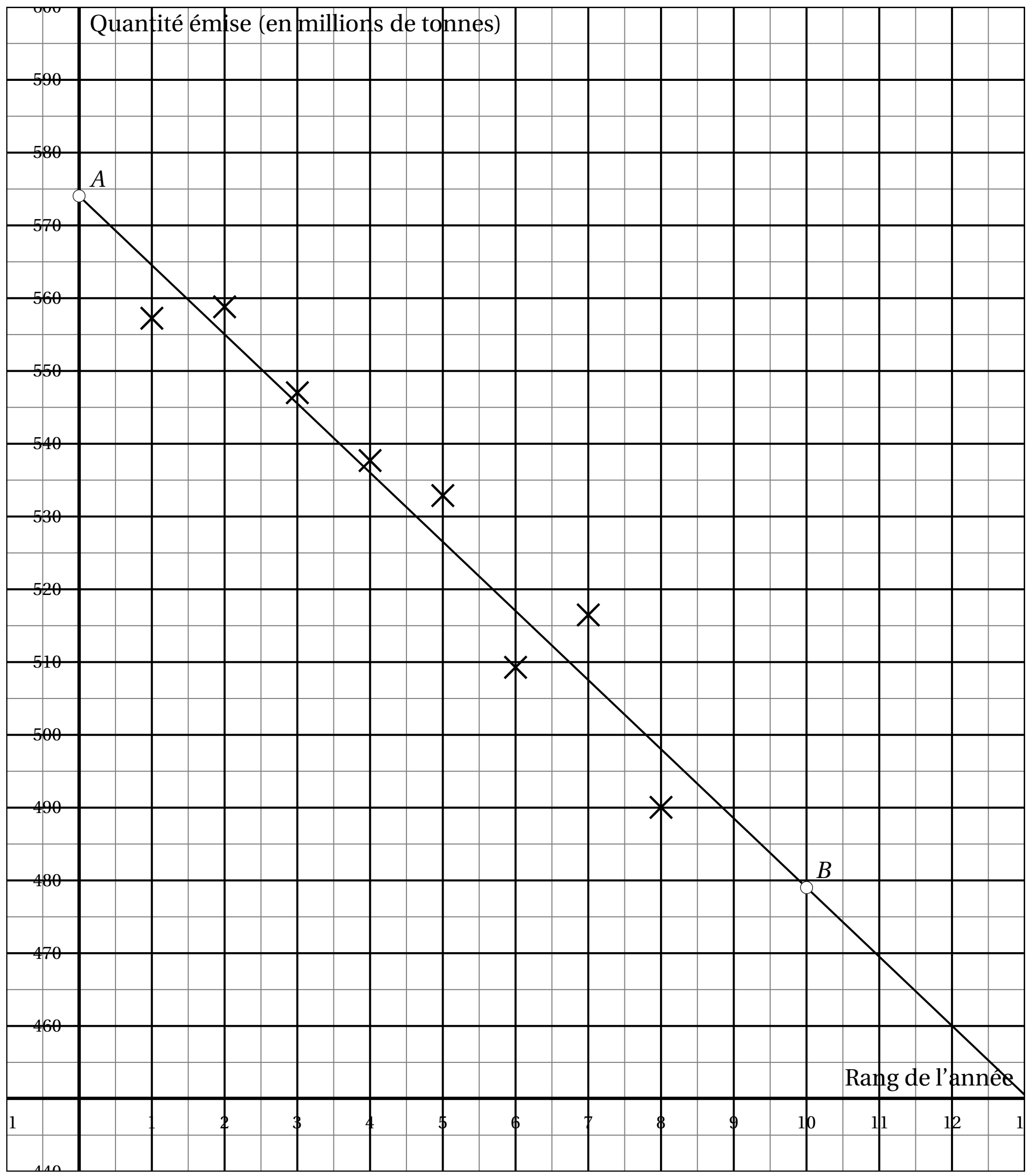
   Il vaut :

$$\left[0{,}112 - \frac{1}{\sqrt{500}}\,;\,0{,}112 + \frac{1}{\sqrt{500}}\right] \simeq [0{,}0673\,;\,0{,}1567]$$

   La fréquence observée est bien dans cet échantillon. $\boxed{\text{On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse.}}$

Annexe à rendre avec la copie

Annexe 1, exercice 3



Annexe 2, exercice 4