Fonctions polynômes du second degré, cours, 1 STMG

Fonctions polynômes du second degré, cours,

ACTIVITÉ 2

À la recherche de fonctions polynômes du second degré

Parmi les tableaux de variation suivants, lesquels sont susceptibles de correspondre à une fonction polynôme du second degré ?

Dans chaque cas où un tableau de variation ne convient pas, indiquer pourquoi.

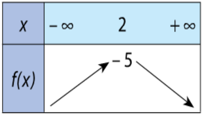


Tableau 1

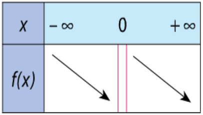


Tableau 2

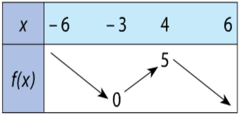


Tableau 3

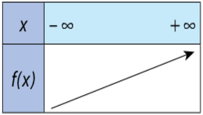


Tableau 4

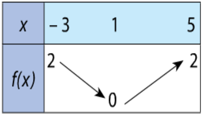


Tableau 5

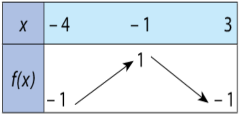


Tableau 6

ACTIVITÉ 1

À la recherche de paraboles

Parmi les courbes suivantes, lesquelles sont susceptibles de représenter une fonction polynôme du second degré ?

Dans chaque cas où une courbe ne convient pas, indiquer pourquoi.

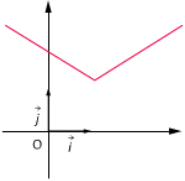


Figure 1

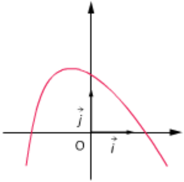


Figure 2

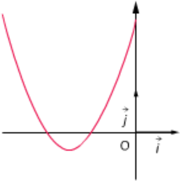


Figure 3

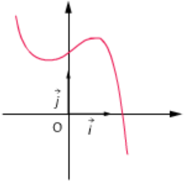


Figure 4

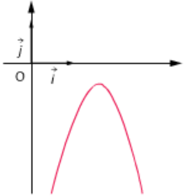


Figure 5

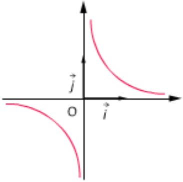


Figure 6

Définition :
On appelle *fonction polynôme du second degré* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'écrit $f(x) =$

Définition :
On appelle *fonction polynôme du second degré* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels fixés et $a \neq 0$.

Propriété et définition :
Toute fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ s'écrit aussi :

Propriété et définition :
Toute fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ s'écrit aussi :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où

$$\alpha =$$

Propriété et définition :
Toute fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ s'écrit aussi :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

(prononcer « alpha »)

$$\beta =$$

Propriété et définition :
Toute fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ s'écrit aussi :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

(prononcer « alpha »)

$$\beta = f(\alpha)$$

(prononcer « beta »)
Cette écriture est appelée

Propriété et définition :
Toute fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ s'écrit aussi :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

(prononcer « alpha »)

$$\beta = f(\alpha)$$

(prononcer « beta »)
Cette écriture est appelée *forme canonique* de la fonction f.

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$
- On vérifie donc que $3(x-1)^2 - 2 =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$
- On vérifie donc que $3(x-1)^2 - 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$
- On vérifie donc que $3(x-1)^2 - 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 = 3x^2 - 6x + 3 - 2 =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$
- On vérifie donc que $3(x-1)^2 - 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 = 3x^2 - 6x + 3 - 2 = 3x^2 - 6x + 1 =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$
- On vérifie donc que $3(x-1)^2 - 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 = 3x^2 - 6x + 3 - 2 = 3x^2 - 6x + 1 = f(x)$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$
- On vérifie donc que $3(x-1)^2 - 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 = 3x^2 - 6x + 3 - 2 = 3x^2 - 6x + 1 = f(x)$

Donc $3(x-1)^2 - 2$ est bien la

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$
- On vérifie donc que $3(x-1)^2 - 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 = 3x^2 - 6x + 3 - 2 = 3x^2 - 6x + 1 = f(x)$

Donc $3(x-1)^2 - 2$ est bien la forme canonique de $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE	Exercices corrigés	Exercices non corrigés
Consolider les acquis	3, 5, 9, 10	1, 2, 4, 6, 7, 8, 11
Résoudre des équations du second degré sans les formules	12	13, 14

13. + Même énoncé qu'à l'exercice **12** avec :
$(x-3)(x-2)=(2x-1)(x-3)$.

14. ++ Sans utiliser les formules du cours, résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

a) $x^2-4x=0$.

b) $2x^2+3=0$.

c) $x^2-5=0$.

d) $(2x-5)^2-9=0$.

e) $-x^2+6x-9=0$.

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum en $x =$

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.
- si $a < 0$ la fonction f est strictement

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.
- si $a < 0$ la fonction f est strictement croissante puis strictement

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.
- si $a < 0$ la fonction f est strictement croissante puis strictement décroissante et admet un maximum en $x =$

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.
- si $a < 0$ la fonction f est strictement croissante puis strictement décroissante et admet un maximum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.

Synthèse :

Si $a > 0$,

Synthèse :

Si $a > 0$,

x	

Synthèse :
Si $a > 0$,

x	$-\infty$	α	$+\infty$

Synthèse :

Si $a > 0$,

x	$-\infty$	α	$+\infty$

Synthèse :
Si $a > 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Synthèse :

Si $a > 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

Synthèse :

Si $a > 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

et si $a < 0$,

Synthèse :
Si $a > 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

et si $a < 0$,

Synthèse :

Si $a > 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

et si $a < 0$,

x	$-\infty$	α	$+\infty$

Synthèse :

Si $a > 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

et si $a < 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que
$\alpha =$

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) =$

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$. Par ailleurs, $a =$

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$. Par ailleurs, $a = 3$. a est

Exemple :

Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$. Par ailleurs, $a = 3$. a est positif donc on a le tableau de variations suivant :

x

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$. Par ailleurs, $a = 3$. a est positif donc on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$. Par ailleurs, $a = 3$. a est positif donc on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$. Par ailleurs, $a = 3$. a est positif donc on a le tableau de variations suivant :

x	-∞	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

Propriété :
Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan, la représentation graphique de la fonction trinôme du second degré f est une *parabole* dont le point S de coordonnées

Propriété :
Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan, la représentation graphique de la fonction trinôme du second degré f est une *parabole* dont le point S de coordonnées $(\alpha; f(\alpha))$ est le *sommet*.

Exemple :

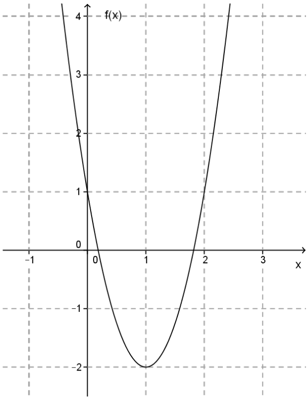
On a vu que pour $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, on a $\alpha =$

Exemple :
On a vu que pour $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, on a $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) =$

Exemple :
On a vu que pour $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, on a $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$ donc le point S de coordonnées

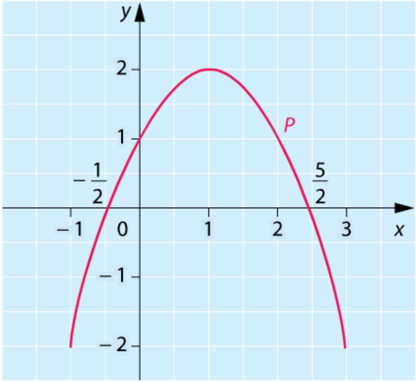
Exemple :
On a vu que pour $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, on a $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$ donc le point S de coordonnées $(1; -2)$ est le sommet de la parabole représentant la fonction f.

Exemple :
On a vu que pour $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, on a $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$ donc le point S de coordonnées $(1; -2)$ est le sommet de la parabole représentant la fonction f.


f(x)
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
0
1
2
3
x

30. ++ Lectures graphiques

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $[-1, 3]$ dont la courbe représentative P est donnée sur la figure ci-dessous. Pour tout x de $[-1, 3]$, $f(x)$ est de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$.



1. Lire sur le graphique les solutions de l'équation du second degré $f(x) = 0$.

2. Résoudre graphiquement dans $[-1, 3]$, l'inéquation $f(x) \leq 0$.

29. +++ Courbe représentative et équation du second degré

TICE

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

1. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	– 0,5	– 0,25	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5
$f(x)$	5,25			3,19			0	

2. Déterminer les nombres réels x, s'ils existent, dont l'image est 4.

3. Même question qu'au **2.** en remplaçant 4 par – 6.

4. Faire apparaître sur l'écran de votre calculatrice la courbe représentative de f pour x appartenant à l'intervalle [– 4, – 1].