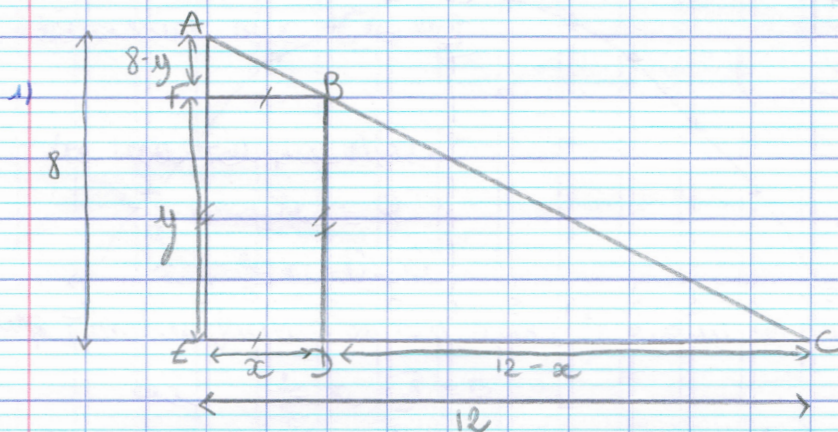


Exercice 1.



2) x correspond à la largeur du rectangle et y correspond à la longueur du rectangle.

3) (AE) et (BD) sont perpendiculaires à (EC) - Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors ces deux droites sont parallèles.

Donc (AE) et (BD) sont parallèles.

oui

D'après le théorème de Thalès

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CD}{CE} = \frac{BD}{AE}$$

$$\frac{CD}{CE} = \frac{BD}{AE}$$

Bien

$$\text{donc } \frac{12-x}{12} = \frac{y}{8}$$

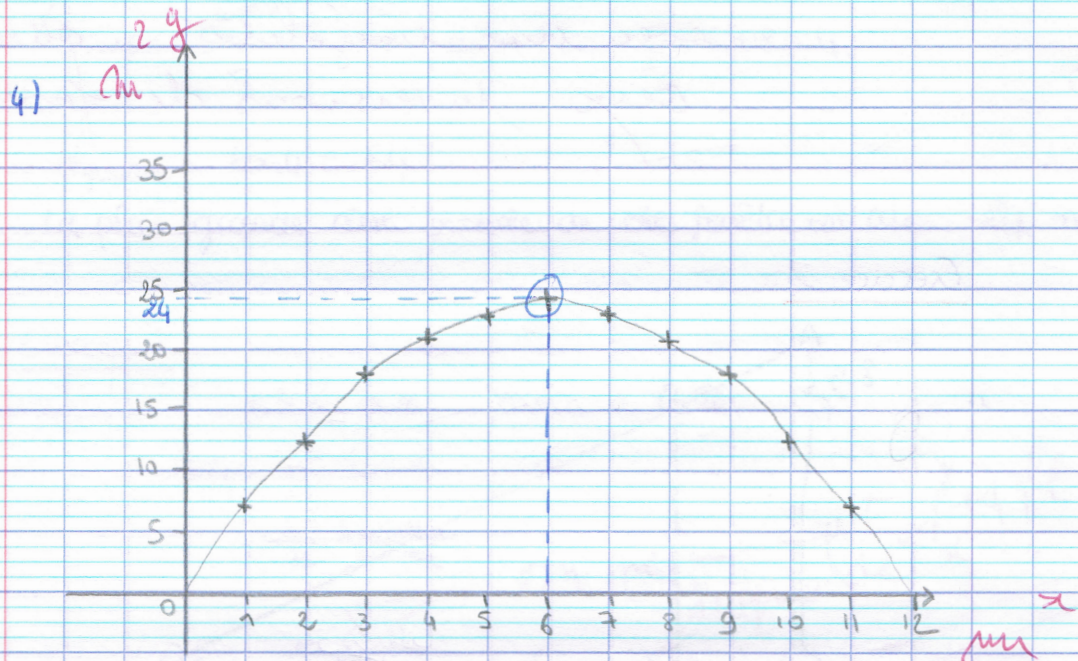
$$\text{avec le produit en croix : } y = \frac{8(12-x)}{12} = \frac{96-8x}{12} = 8 - \frac{8}{12}x = -\frac{2}{3}x + 8$$

• donc $\phi(x) = axy$

comme $y = -\frac{2}{3}x + 8$

$\phi(x) = x \left(-\frac{2}{3}x + 8\right)$

alors $\phi(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 8x$



5) a) Sur le graphique, on lit le maximum de la fonction ϕ .
le maximum de ϕ est alors 24, atteint en 6.

b) la variation de $A(x)$ est définie sur $[0, 12]$

Soit M , le taux d'accroissement de la fonction ϕ

Soient a et b , deux réels compris entre 0 et 12

$$M = \frac{F(a) - F(b)}{a - b} = \frac{\left(-\frac{2}{3}a^2 + 8a\right) - \left(-\frac{2}{3}b^2 + 8b\right)}{a - b}$$

$$M = \frac{\frac{2}{3}(-a^2 + b^2) + 8(a - b)}{a - b} = \frac{\frac{2}{3}(b + a)(b - a) + 8(a - b)}{a - b}$$

$$M = -\frac{2}{3}(a + b) + 8$$

Lorsque $M = 0$, alors la fonction ϕ est à son maximum - donc si $a = b$, on

obtient l'équation

$$-\frac{2}{3}(2a) + 8 = 0$$

$$-\frac{2}{3} \times 2a + 8 = 0$$

$$-\frac{4}{3}a = -8$$

$$a = \frac{-8}{-\frac{4}{3}} = 6$$

B'

donc la fonction A atteint son maximum en 6

$$A(6) = -\frac{2}{3} \times 6^2 + 8 \times 6 = 24$$

La courbe $\mathcal{CA}$ est une parabole convexe croissante sur $[0; 6]$ puis décroissante sur $[6; 12]$

$\mathcal{CA}$

les réels tels que $A(x) = 0$:

$$-\frac{2}{3}x^2 + 8x = 0$$

$$x(-\frac{2}{3}x + 8) = 0$$

Si l'un des facteurs est nul alors le produit est nul donc $x = 0$

$$\text{ou } -\frac{2}{3}x + 8 = 0$$

$$-\frac{2}{3}x = -8$$

$$x = \frac{-8}{-\frac{2}{3}} = 12$$

donc $A(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = 12$

$\mathcal{CA}$

donc:

x	0	6	12
$A(x)$	0 ↗	24	↘ 0

© la représentation graphique de la fonction A coupe l'axe des abscisses lorsque $x = 0$ et $x = 12$.

Le maximum de la fonction A correspond au point le plus haut de $\mathcal{CA}$. L'abscisse de ce point est le milieu du segment ayant pour extrémités 0 et 12. Donc $x_{\max} = \frac{0+12}{2} = 6$. Donc la fonction A atteint son maximum

en 6.

$$A(6) = -\frac{2}{3} \times 6^2 + 8 \times 6 = 24$$

La maximum de la fonction est 24.

L'aire de la fenêtre avec $x=6$:

$$y = -\frac{2}{3} \times x + 8 \text{ donc } y = -\frac{2}{3} \times 6 + 8 = 4$$

$$A_{\text{fenêtre}} = 6 \times 4 = 24$$

La plus grande aire possible de cette fenêtre est alors 24 m².

Exercice 2:

$$x^2 \leq ax \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{donc } x^2 \leq ax$$

$$\frac{x^2}{x} \leq \frac{ax}{x}$$

$$x \leq a$$

$$\text{donc } a \in [x; +\infty[$$

On ne connaît pas le signe de x !!

Exercice 3:

La somme d'un réel strictement positif et de son inverse est toujours supérieur ou égale à 2.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x > 0$

$$\text{alors } \frac{x+1}{x} \geq 2$$

$$\text{donc } x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$= x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$$

$x > 0$ donc ici le dénominateur est toujours positif et pour le numérateur, un carré est toujours positif

$$\text{donc } \frac{(x-1)^2}{x} \text{ est toujours supérieur à } 0$$

$$\text{si } x > 0 \text{ alors } x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Exercice 3: Vrai ou Faux ?

"La somme d'un réel strictement positif et de son inverse est toujours supérieur ou égale à 2"

Soit $x + \frac{1}{x} \geq 2$ si $x > 0$

pour $x = 1$

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

$$1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$1 + \frac{1}{1} = 2 \geq 2$$

Egalité vraie pour $x = 1$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$$

$$\frac{x^2 + 1 - 2x}{x} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

$\frac{(x-1)^2}{x}$ est toujours positif ou nul si $x > 0$

car le nombre au carré situé au numérateur est positif ou nul ainsi que le dénominateur qui est lui-même toujours positif si $x > 0$.

donc, si $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 6:

1. Calcul du volume du tétraèdre IFBG.

$$V_{IFBG} = \frac{\text{Aire base} \times \text{hauteur}}{3}$$

on sait que I est milieu de [EF]

donc FI = 2,5 cm.

et FB = 5 cm.

$$\text{Soit } V_{IFBG} = \frac{\frac{FI \times FB}{2} \times FG}{3}$$

$$V_{IFBG} = \frac{\frac{2,5 \times 5}{2} \times 5}{3}$$

$$V_{IFBG} = \frac{\frac{12,5}{2} \times 5}{3}$$

$$V_{IFBG} = \frac{6,25 \times 5}{3}$$

$$V_{IFBG} = \frac{31,25}{3}$$

$$V_{IFBG} = \frac{125}{12} \text{ cm}^3$$

Calcul du volume du tétraèdre IEAH

$$V_{IEAH} = \frac{\text{Aire base} \times \text{hauteur}}{3}$$

I milieu de [EF]

$$\text{donc IE} = 2,5 \text{ cm}$$

$$\text{et EA} = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Soit } V_{IEAH} = \frac{\frac{\text{IE} \times \text{EA}}{2} \times \text{EH}}{3}$$

$$V_{IEAH} = \frac{\frac{2,5 \times 5}{2} \times 5}{3}$$

$$V_{IEAH} = \frac{125}{12} \text{ cm}^3$$

Calcul du volume du prisme ADHGCB

$$V_{ADHGCB} = \text{Aire base} \times \text{hauteur}$$

$$V_{ADHGCB} = \frac{5 \times 5}{2} \times 5$$

$$V_{ADHGCB} = \frac{25}{2} \times 5$$

$$V_{ADHGCB} = \frac{125}{2} \text{ cm}^3$$

Bien

2. Volume de la pyramide IABGH.

volume cube - volume prisme
tétracède IFBG - volume tétracède ^{ADHGB} ICAH.

$$125 - \frac{125}{2} - \frac{125}{12} - \frac{125}{12} = \frac{125}{3}$$

$$V_{IABGH} = \frac{125}{3} \text{ cm}^3$$

3. Calcul de la hauteur de la pyramide IABGH.

$$V_{IABGH} = \frac{\text{Aire base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{125}{3} \text{ cm}^3$$

D'après le théorème de Pythagore *expliqué ci-dessous*

$$AD^2 + DH^2 = AH^2$$

$$25 + 25 = AH^2$$

$$50 = AH^2$$

$$\sqrt{50} = AH$$

$$5\sqrt{2} = AH$$

$$\text{donc } A_{ABGH} = 5 \times 5\sqrt{2}$$

$$= 25\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$25\sqrt{2} \times h = 125.$$

$$h = \frac{125}{25\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$h_{IABGH} = \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ cm}$$

Exercice 2:

$$x^2 \leq ax \quad x(x-a) \leq 0 \quad \text{oui}$$

$$\text{Si } x = 0 \text{ alors } x(x-a) = 0$$

Pour que $x(x-a) < 0$ $\frac{a}{x}$ doit être supérieur

Tableau de signe !!

Exercice 3:

$$x > 0 \quad x + \frac{1}{x}$$

$$\text{Pour } x = 1$$

$$1 + \frac{1}{1} = 2 \text{ donc } x \geq 2.$$

C'est donc vraie pour $x = 1$.

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$$

$$\frac{x^2 + 1 - 2x}{x} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

Donc cette phrase est vraie car un carré est toujours positif et $x > 0$

oui

O/B

O/B

Exercice 4:

$$1) V_{IFBG} = \frac{\text{Aire base} \times \text{hauteur}}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Aire de la base} &= \text{aire du triangle}_{IBF} \\ &= \frac{FB \times FI}{2} = \frac{5 \times 2,5}{2} = 6,25 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{hauteur} = FG = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Donc } V_{IFBG} = \frac{6,25 \times 5}{3} = \frac{125}{12} \text{ cm}^3$$