Exercice 1

Répondre aux questions suivantes sans aucune justification :

1. On considère le polynôme $P=2\cdot(2x-1)(3-x)(x+2)$:
   a. Donner, sans justification, le coefficient du terme de degré 3 du polynôme P et la valeur de son terme numérique.
   b. Parmi les polynômes ci-dessous, lequel est la forme développée et réduite du polynôme P ?
      - $-4x^3+6x^2+22x+12$
      - $4x^3+6x^2+22x-12$
      - $-4x^3+6x^2+22x-12$
      - $4x^3+6x^2+22x+12$
2. Déterminer la valeur de a, un nombre réel, vérifiant l'égalité suivante :
   $$(2x+1)(3x^2+a\cdot x+1)=6x^3-7x^2-3x+1$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par :

$f(x)=-6x^2+10x-4$

1. Etablir les égalités suivantes :
   $$f(x)=2(x-1)(2-3x)=-6\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{6}$$
2. Calculer l'image des nombres ci-dessous par la fonction f

   a. 0 b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{5}{6}$

Exercice 3

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est définie par la relation :

$f(x)=2x^2+4x-1$

1. Etablir l'égalité : $f(x)=2(x+1)^2-3$
2. Montrer que :
   a. f est strictement décroissante sur $\big]-\infty;-1\big]$.
   b. f est strictement croissante sur $\big[-1;+\infty\big[$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. En déduire que -3 est le minimum de la fonction f.

Exercice 4

Pour chacune des fonctions, déterminer les caractéristiques de leur extrémum et dresser le tableau de variation :

a. $f:x\longmapsto 2x^2+8x+1$ b. $g:x\longmapsto -x^2+2x+1$

c. $h:x\longmapsto x^2+4x+4$ d. $j:x\longmapsto -3x^2+9x-2$

e. $k:x\longmapsto 3x^2+2x+2$ f. $\ell:x\longmapsto -x^2+2\sqrt{3}x-1$

Exercice 5

1. Soit f la fonction définie par la relation :
   $f(x)=2x^2+3x+1$
   a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   b. Justifier que la fonction f s'annule en deux valeurs.
2. Soit g la fonction définie par la relation :
   $g(x)=-4x^2+4x-1$
   a. Dresser le tableau de variation de la fonction g.
   b. Justifier que la fonction g s'annule en une unique valeur qu'on précisera.
3. Soit h la fonction définie par la relation :
   $h(x)=4x^2+2x+1$
   a. Dresser le tableau de variation de la fonction h.
   b. Justifier que la fonction h ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f:x\longmapsto -2x^2+2x+12$

1. Etablir les égalités suivantes :
   $$-2x^2+2x+12=(3-x)(2x+4)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$$
2. a. Justifier que la fonction f s'annule pour deux nombres qu'on précisera.
   b. Justifier que la fonction f admet $\frac{25}{2}$ pour maximum.
3. a. Etablir que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$.
   b. Dresser, sans justification, le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

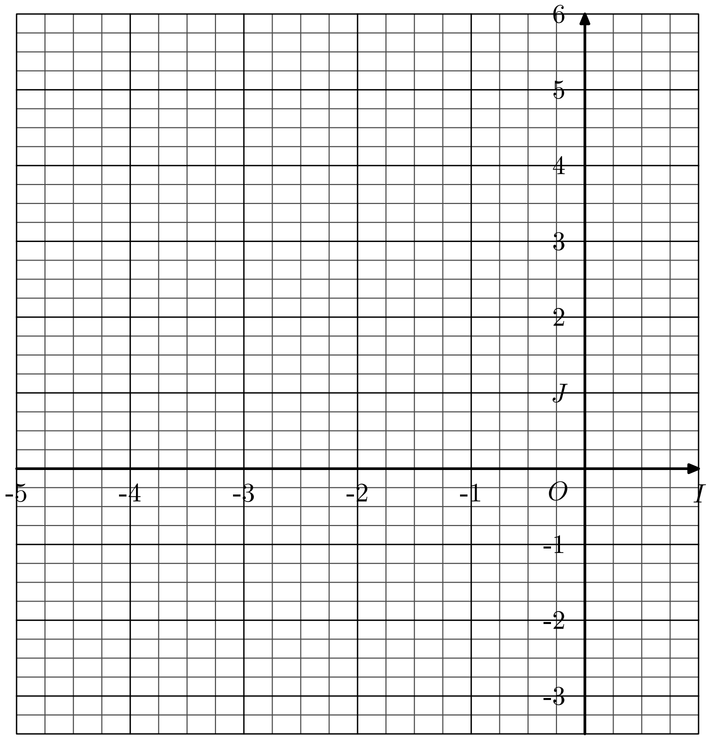
On considère la fonction : $f:\ x\longmapsto x^2+4x+1$:

1. Etablir l'égalité : $f(x)=(x+2)^2-3$
2. a. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-2\right]$
   b. Dresser, sans justification, son tableau de variation.
   c. Donner les caractéristiques de l'extremum de la fonction f.
3. a. Compléter le tableau ci-dessous de valeurs de la fonction f :

x	-5	-4	$-3{,}5$	-3	$-2{,}5$	-2
$f(x)$						

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	1
$f(x)$					

   b. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans le repère ci-dessous :

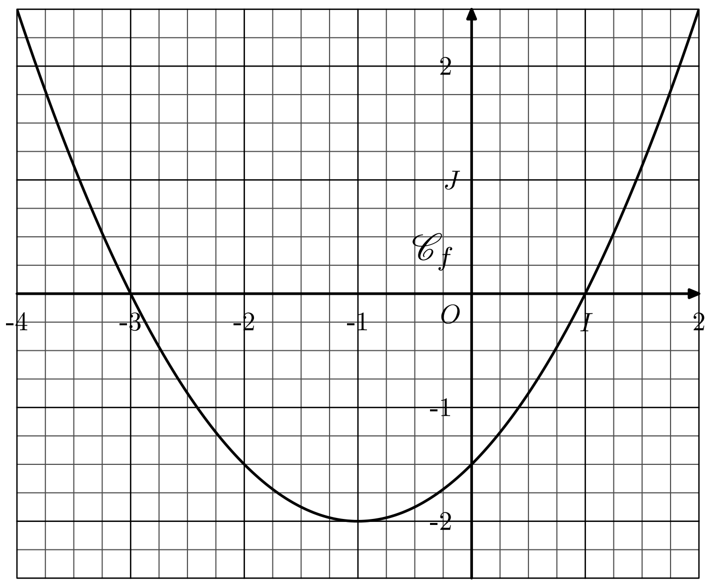


Exercice 8

On considère la fonction f, qui à tout nombre x, associe son image $f(x)$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$

Le graphique ci-dessous donne la représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal :



Partie A : étude graphique

Graphiquement, répondre aux questions suivantes :

1. Donner les antécédents du nombre 0 par f.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;2]$.
3. Donner les caractéristiques de l'extrémum de la fonction f.

Partie B : étude algébrique

1. a. Etablir l'egalité suivante : $f(x) = \frac{1}{2}\cdot(x+3)(x-1)$
   b. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$.
2. a. Etablir l'égalité suivante : $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$
   b. Démontrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.

Exercice 9

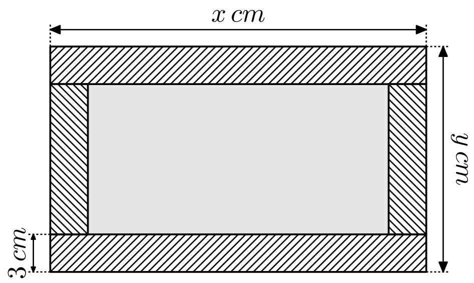
On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est définie par :

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 3$$

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   b. Préciser les caractéristiques de l'extrémum de la fonction f.
2. Soit h un nombre quelconque positif :
   a. Déterminer la forme développée et réduite des deux expressions suivantes :
   $f(1-h)$; $f(1+h)$
   b. Que peut-on dire sur les deux points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives $(1-h)$ et $(1+h)$.

Exercice 10

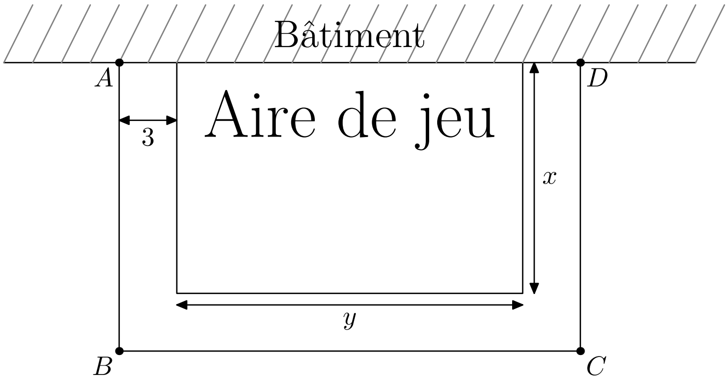
Un menuisier dispose d'une baguette de bois de 100 centimètres de longueur et de 3 centimètres de largeur. Il souhaite utiliser toute la longueur de cette baguette pour la confection d'un cadre en bois à l'image du dessin ci-dessous :



1. a. Déterminer la valeur de y en fonction de x.
   b. En déduire les valeurs possibles de x.
2. Donner l'expression de l'aire $\mathcal{A}(x)$ de l'intérieur du cadre en fonction de x.
3. a. Etablir l'égalité suivante :
   $\mathcal{A}(x) = -(x-28)^2 + 484$
   b. Montrer que la fonction $\mathcal{A}$ est croissante sur $]6\,;28]$ et qu'elle est décroissante sur $[28\,;50[$.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$, puis en déduire l'aire maximale que peut prendre un tel cadre.

Exercice 11

On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire. De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à $10\,m$. Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allé de $3\,m$ de large comme l'indique le croquis ci-dessous.



L'ensemble est clôturé sur les trois côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.
On s'intéresse à la longueur $\mathscr{L}$ de la clôture :
$\mathscr{L} = AB + BC + CD$.
On note x et y les dimensions en mètres de l'aire de jeu *(la valeur de x et de y sont nécessairement positifs).*

1. Exprimer la longueur $\mathscr{L}$ de la cloture en fonction des valeurs des valeurs de x et de y.

2. On dispose de 100 mètres de clôture qu'on souhaite entièrement utilisé :
   a. Exprimer, dans ces conditions, la valeur de y en fonction de x.
   b. Justifier que la valeur de x doit être inférieure à 44.
   c. Justifier que l'aire de jeux a pour aire :
   $\mathscr{A}(x) = 88x - 2x^2$

3. a. Justifier l'égalité ci-dessous :
   $\mathscr{A}(x) = 968 - 2(x-22)^2$
   b. En déduire la croissance de la fonction $\mathscr{A}$ sur l'intervalle $]0\,;22]$.
   c. Dresser, sans justification, le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $]0\,;44[$.

4. En déduire les dimensions afin que les 100 mètres de clôtures soient utilisés et que l'aire de jeu soit maximale.

Exercice 12

Dans une fête forraine, le gérant de l'attraction "*la chenille en folie*" fait le constat suivant :
- Son manège peut accueillir 70 personnes par tour ;
- S'il fixe le prix à 1 €, son manège est plein à chaque tour ;
- Chaque fois qu'il augmente le prix de 0,50 €, il perd 5 clients.

On note x le prix d'une place : le nombre x appartient à l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$.

On s'intéresse à la valeur de la recette faîte par cette attraction à chaque tour en fonction du prix x des places ; on note $\mathcal{R}(x)$ la valeur de cette recette.

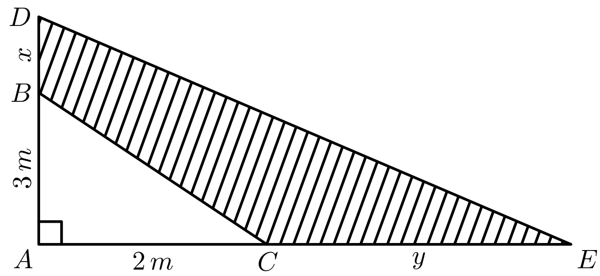
1. Justifier que le la recette admet l'expression :
   $\mathcal{R}(x) = 80x - 10x^2$

2. a. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{R}$.
   b. En déduire la recette maximale que peut réaliser cette attraction. Quel doit-être le prix d'un tour pour réaliser ce maximum ?

3. Le gérant souhaite réaliser une recette supérieure à 150 € à chaque tour de manège. Déterminons les prix possibles d'une place réalisant cette condition :
   a. Développer l'expression : $(x-4)^2-1$.
   En déduire l'expression de la forme canonique de l'expression $\mathcal{R}(x)-150$.
   b. Factoriser l'expression : $(x-4)^2-1^2$.
   Puis, factoriser l'expression $\mathcal{R}(x)-150$.
   c. Déterminer les solutions de l'équation : $\mathcal{R}(x)=150$.
   d. En utilisant la question précédente et le tableau de variation de la fonction $\mathcal{R}$, donner sans justification l'ensemble des solutions de l'inéquation $\mathcal{R}(x) \geqslant 150$.

Exercice 13

On considère la figure ci-dessous :



Elle vérifie les conditions suivantes :
- Le triangle ABC est rectangle en A tel que :
  $AB = 3\,m$; $AC = 2\,cm$
- Le point D est définie par : $D \in [AB)$; $D \notin [AB]$
- Le point E est définie par : $E \in [AC)$; $E \notin [AC]$
- On a la relation : $BD + CE = 10\,m$.

On note x et y les longueurs respectives des segments $[BD]$ et $[CE]$.

1. a. Etablir l'identité :
   $$2\cdot x^2 - 18\cdot x + 153 = 2\cdot\left[\left(x-\frac{9}{2}\right)^2 + \frac{225}{4}\right]$$
   b. Déterminer les valeurs de x et de y afin que la longueur du segment $[DE]$ soit minimale.

2. Déterminer les valeurs possibles de x et de y afin que l'aire de la partie hachurée mesure $15\,m^2$

Correction 1

1. a. Le coefficient du terme de degré 3 du polynôme P a pour valeur -4
Le terme numérique aura pour valeur -12.

b. D'après les valeurs obtenues à la question a., le seul polynôme vérifiant ces conditions est :
$-4x^3+6x^2+22x-12$

On peut vérifier la précédente affirmation en développant et réduisant le polynôme P :
$P=2(2x-1)(3-x)(x+2)=\big[(4x-2)(3-x)\big](x+2)$
$=\big(12x-4x^2-6+2x\big)(x+2)$
$=\big(-4x^2+14x-6\big)(x+2)$
$=-4x^3+14x^2-6x-8x^2+28x-12$
$=-4x^3+6x^2+22x-12$

2. On a le développement :
$\big(2x+1\big)\big(3x^2+a{\cdot}x+1\big)=6x^3+2a{\cdot}x^2+2x+3x^2+a{\cdot}x+1$
$=\ 6{\cdot}x^3+\big(2a+3\big){\cdot}x^2+\big(2+a\big){\cdot}x+1$

Dans ce produit le terme du premier degré obtenu après développement et réduction a pour valeur $\big(2{+}a\big){\cdot}x$
Par identification des coefficients avec la forme développée réduite, on obtient l'égalité :
$2+a=-3$
$a=-3-2$
$a=-5$

On en déduit que : $a{=}{-}5$

On peut vérifier le résultat précédent :
$\big(2x+1\big)\big(3x^2-5x+1\big)$
$=\ 6x^3-10x^2+2x+3x^2-5x+1$
$=\ 6x^3-7x^2-3x+1$

Correction 2

1. Montrons que chacune de ces formes est équivalente à une même expression développée réduite :

- $2(x{-}1)(2{-}3x)=(2x{-}2)(2{-}3x)=4x-6x^2-4+6x$
$=-6x^2+10x-4=f(x)$
- $f(x)=-6\Big(x-\dfrac{5}{6}\Big)^2+\dfrac{1}{6}=-6\Big(x^2-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{25}{36}\Big)+\dfrac{1}{6}$
$=-6x^2+10x-\dfrac{25}{6}+\dfrac{1}{6}=-6x^2+10x-\dfrac{24}{6}$
$=-6x^2+10x-4$

2. Chacun des nombres présentés est plus facile avec une des trois expressions définissant la fonction f :

a. $f(0)=-6{\times}0^2+10{\times}0-4=0+0-4=-4$

b. $f\Big(\dfrac{2}{3}\Big)=2\Big(\dfrac{2}{3}-1\Big)\Big(2-3{\times}\dfrac{2}{3}\Big)=2\Big(\dfrac{2}{3}-1\Big){\times}0=0$

c. $f\Big(\dfrac{5}{6}\Big)=-6\Big(\dfrac{5}{6}-\dfrac{5}{6}\Big)^2+\dfrac{1}{6}=-6{\times}0+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$

Correction 3

1. On a les transformation algébriques suivantes :
$2(x+1)^2-3=2(x^2+2x+1)-3=2x^2+4x+2-3$
$=2x^2+4x-1=f(x)$

2. a. Soit a et b deux nombres appartenant à $\big]-\infty\,;1\big]$ tels que $a<b$:
$a<b<-1$
$a+1<b+1<0$
Deux nombres négatifs et leurs carrés sont comparés dans le sens contraire :
$(a+1)^2>(b+1)^2$
$2(a+1)^2>(b+1)^2$
$2(a+1)^2-3>(b+1)^2-3$
$f(a)>f(b)$
Deux nombres de $\big]-\infty\,;-1\big]$ et leurs images sont comparés dans le sens contraire : la fonction f est décroissante sur $\big]-\infty\,;-1\big]$.

b. Soit a et b deux nombres appartenant à $\big[1\,;+\infty\big[$ tels que $a<b$:
$-1<a<b$
$0<a+1<b+1$
Deux nombres positifs et leurs carrés sont comparés dans le même sens :
$(a+1)^2<(b+1)^2$
$2(a+1)^2<(b+1)^2$
$2(a+1)^2-3<(b+1)^2-3$
$f(a)<f(b)$
Deux nombres de $\big[-1\,;+\infty\big[$ et leurs images sont comparés dans le même sens : la fonction f est croissante sur $\big[-1\,;-\infty\big[$.

3. On a le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	-3	↗ $+\infty$

4. Le tableau de variation indique que la fonction f admet -3 comme valeur minimale et qu'elle est atteinte pour $x=-1$.

Correction 4

1. On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{8}{2{\times}2}=-2$
- $f(-2)=2{\times}(-2)^2+8{\times}(-2)+1=8-16+1=-7$

Le fonction f a un coefficient du second degré positif. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	-2
Variation de f	$+\infty$ ↘	-7	↗ $+\infty$

2. On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{2{\times}(-1)}=-\dfrac{2}{-2}=1$
- $g(1)=-1^2+2{\times}2+1=0$

Le fonction g a un coefficient du second degré négatif. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		2
Variation de g			0		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

3. On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4}{2\times 1}=-\dfrac{4}{2}=-2$
- $h(-2)=(-2)^2+4\times(-2)+4=4-8+4=0$

Le fonction h a un coefficient du second degré positif. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		2
Variation de h	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	
			0		

4. On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{9}{2\times(-3)}=-\dfrac{9}{-6}=\dfrac{3}{2}$
- $j\Big(\dfrac{3}{2}\Big)=-3\cdot\Big(\dfrac{3}{2}\Big)^2+9\times\dfrac{3}{2}-2=-3\times\dfrac{9}{4}+\dfrac{27}{2}-2$

$=\dfrac{-27+54-8}{4}=\dfrac{19}{4}$

Le fonction j a un coefficient du second degré négatif. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2
Variation de j			$\frac{19}{4}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

5. On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{-2\times 3}=-\dfrac{2}{-6}=\dfrac{1}{3}$
- $k\Big(\dfrac{1}{3}\Big)=3\cdot\Big(\dfrac{1}{3}\Big)^2+2\times\dfrac{1}{3}+2=3\times\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{3}+2$

$=\dfrac{1+2+6}{3}=\dfrac{9}{3}=3$

Le fonction k a un coefficient du second degré positif. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2
Variation de k	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	
			3		

6. On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times(-1)}=\sqrt{3}$
- $f\big(\sqrt{3}\big)=-\big(\sqrt{3}\big)^2+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-1=-3+6-1=2$

Le fonction ℓ a un coefficient du second degré négatif. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\sqrt{3}$		2
Variation de ℓ			2		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

Correction 5

1. a. On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2\cdot a}=-\dfrac{3}{2\times 2}=-\dfrac{3}{4}$
- $f\Big(-\dfrac{3}{4}\Big)=2\cdot\Big(-\dfrac{3}{4}\Big)^2+3\cdot\Big(-\dfrac{3}{4}\Big)+1$

$=2\times\dfrac{9}{16}-\dfrac{9}{4}+1=\dfrac{9}{8}-\dfrac{9}{4}+1$

$=\dfrac{9-18+8}{8}=-\dfrac{1}{8}$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on a le tableau de vqriation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		-2
Variation de f	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	
			$-\frac{1}{8}$		

b. La fonction f admet pour minimum $-\dfrac{1}{8}$ et il est atteint pour $x=-\dfrac{3}{4}$.

D'après le tableau de variation, la fonction f s'annule une fois sur chacun de ces intervalles $\Big]-\infty\,;-\dfrac{3}{4}\Big]$ et $\Big[-\dfrac{3}{4}\,;+\infty\Big[$

2. a. On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2\cdot a}=-\dfrac{4}{2\times(-4)}=-\dfrac{4}{-8}=\dfrac{1}{2}$
- $g\Big(\dfrac{1}{2}\Big)=-4\cdot\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^2+4\cdot\Big(\dfrac{1}{2}\Big)-1=-4\times\dfrac{1}{4}+2-1$

$=-1+2-1=0$

Le coefficient du terme du second degré étant négatif, on a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2
Variation de g			0		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

b. La fonction g admet pour maximum 0 et il est atteint pour $x=\dfrac{1}{2}$.

Le tableau de variation indique que la fonction g n'admet qu'un seul antécédent du nombre 0.

3. a. On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2\cdot a} = -\dfrac{2}{2\times 4} = -\dfrac{1}{4}$
- $h\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 4\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 + 2\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right) + 1$

$$= 4\times\frac{1}{16} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1-2+4}{4} = \frac{3}{4}$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on a le tableau variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		2
Variation de h	$+\infty$	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$

b. La fonction h admet pour minimum $\dfrac{3}{4}$ et il est atteint pour $x=-\dfrac{1}{4}$: la fonction ne peut pas s'annuler.

Correction 6

1. Montrons que toutes ces expressions algébriques admettent la forme développée réduite :

- $(3-x)(2x+4) = 6x+12-2x^2-4x = -2x^2+2x+12$
- $-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{23}{2} = -2\left(x^2 - x + \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{23}{4}$

$$= -2x^2 + 2x - \frac{1}{2} + \frac{25}{4} = -2x^2 + 2x + \frac{24}{2}$$

$$= -2x^2 + 2x + 12$$

2. a. Résolvons l'équation ci-dessous :

$$f(x) = 0$$
$$(3-x)(2x+4) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. On obtient les deux équations suivantes :

$3-x=0$	$2x+4=0$
$-x=-3$	$2x=-4$
$x=3$	$x=-2$

Ainsi, cette équation admet pour ensemble de solution :

$\mathcal{S} = \{-2\,;3\}$

et montre que la fonction f s'annule en deux nombres.

b. Pour tout nombre réel x, on a :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$$
$$-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} \leqslant \frac{25}{2}$$
$$f(x) \leqslant \frac{25}{2}$$

L'image de $\dfrac{1}{2}$ par la fonction f a pour valeur :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} = 0 + \frac{25}{2} = \frac{25}{2}$$

On en déduit $\dfrac{25}{2}$ est la valeur maximale atteinte par la fonction f et ceci pour $x=\dfrac{1}{2}$.

3. a. Soit a et b deux nombres appartenant à l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right]$ tels que $a<b$. On a les inégalités suivantes :

$$a < b < \frac{1}{2}$$
$$a - \frac{1}{2} < b - \frac{1}{2} < 0$$

Deux nombres négatifs et leurs carrés sont ordonnées dans le sens contraire :

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 > \left(b-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$-2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 < -2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$-2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} < -2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$$
$$f(a) < f(b)$$

Deux nombres de l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right]$ et leurs images sont comparées dans le même sens : la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right]$.

b. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	↗	$\frac{25}{2}$	↘	$-\infty$

Correction 7

1. On a les transformations algébriques suivantes :

$(x+2)^2 - 3 = x^2 + 4\cdot x + 4 - 3$

$= x^2 + 4\cdot x + 1 = f(x)$

2. a. Soit a et b deux nombres appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;-2]$, on a les comparaisons suivantes :

$$a < b < -2$$
$$a+2 < b+2 < 0$$

Deux nombres négatifs et leurs carrés sont comparés dans le sens contraire :

$$(a+2)^2 > (b+2)^2 > 0$$
$$(a+2)^2 - 3 > (b+2)^2 - 3 > 0$$
$$f(a) > f(b)$$

Deux nombres de l'intervalle $]-\infty\,;-2]$ et leurs images par la fonction f sont comparés dans le sens contraire : la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;-2]$

b. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

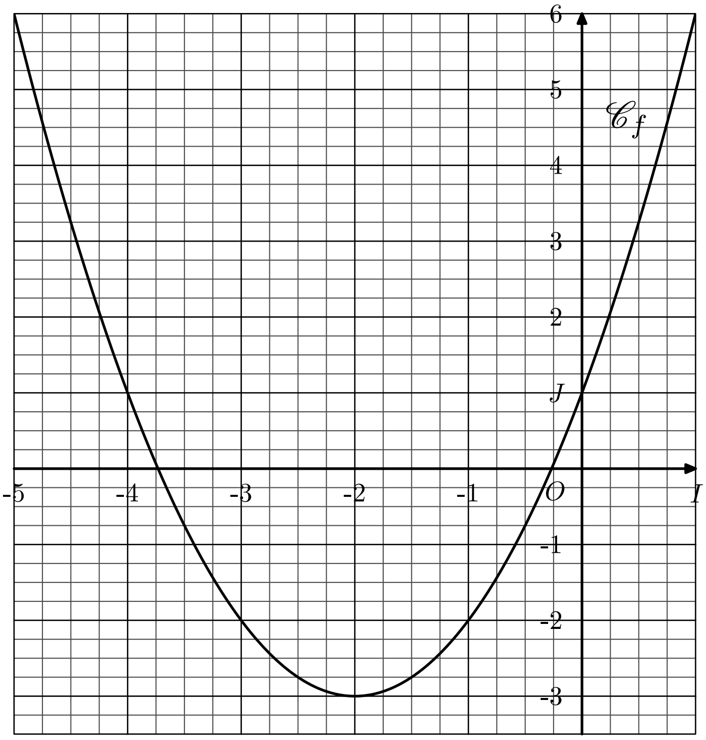
c. L'extremum de la fonction f est un minimum qui a pour valeur -3 et est atteint pour $x=-2$.

3. a. On a le tableau :

x	-5	-4	$-3{,}5$	-3	$-2{,}5$	-2
$f(x)$	6	1	$-0{,}75$	-2	$-2{,}75$	-3

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	1
$f(x)$	$-2{,}75$	-2	$-0{,}75$	1	6

b. On a la représentation graphique :



Correction 8

Partie A

1. L'axe des abscisses interceptent la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points de coordonnées $\big(-3\,;0\big)$ et $\big(1\,;0\big)$.
L'équation $f(x)=0$ admet pour ensemble des solutions :
$\big\{-3\,;\,1\big\}$

2. Graphiquement, on obtient le tableau de variation ci-dessous :

x	-4	-1	2
Variation de f	$2,5$ ↘	-2	↗ $2,5$

3. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet un sommet de coordonnées $\big(-1\,;-2\big)$: le minimum de la fonction f a pour valeur 3.

Partie B

1. a. On a les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{1}{2}\cdot(x+3)(x-1) = \frac{1}{2}\cdot\big(x^2-x+3x-3\big)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\big(x^2+2x-3\big) = \frac{1}{2}\cdot x^2+x-\frac{3}{2} = f(x)$$

b. Résolvons l'équation :
$$f(x)=0$$
$$\frac{1}{2}\cdot(x+3)(x-1)=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. On obtient les deux équations suivantes :

$x+3=0$ | $x-1=0$
$x=-3$ | $x=1$

L'ensemble des antécédents du nombre 0 par la fonction f est :
$\mathcal{S}=\big\{-3\,;\,1\big\}$

2. a. On a les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{1}{2}\cdot(x+1)^2 = \frac{1}{2}\cdot\big(x^2+2x+1\big)-2$$
$$= \frac{1}{2}\cdot x^2+x+\frac{1}{2}-2 = \frac{1}{2}\cdot x^2+x-\frac{3}{2} = f(x)$$

b. Soit a et b deux nombres appartenant à l'intervalle $\big]-\infty\,;-1\big]$ tels que $a<b$. On a les comparaisons suivantes :
$$\begin{aligned} a &< b<-1\\ a+1 &< b+1<0\\ (a+1)^2 &> (b+1)^2\\ \frac{1}{2}\cdot(a+1)^2 &> \frac{1}{2}\cdot(b+1)^2\\ \frac{1}{2}\cdot(a+1)^2-2 &> \frac{1}{2}\cdot(b+1)^2-2\\ f(a) &> f(b)\end{aligned}$$
Deux nombres de l'intervalle $\big]-\infty\,;-1\big]$ et leurs images par la fonction f sont comparés dans le sens contraire : la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\big]-\infty\,;-1\big]$.

Correction 9

1. a. On a les éléments suivants :
- $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2\times(-2)} = -\dfrac{4}{-4} = 1$
- $f(1) = -2\times1^2+4\times1+3 = -2+4+3 = 5$

On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	5	↘ $-\infty$

b. Ainsi, la fonction f admet pour maximum -5 et est atteint pour $x=1$.

2. a. Développons les deux expressions demandées :
- $f(1-h) = -2(1-h)^2+4(1-h)+3$
$= -2(1-2h+h^2)+4-4h+3$
$= -2+4h-2h^2+4-4h+3 = -2h^2+5$
- $f(1+h) = -2(1+h)^2+4(1+h)+3$
$= -2(1+2h+h^2)+4+4h+3$
$= -2-4h-2h^2+4+4h+3 = -2h^2+5$

b. On remarque que les points d'abscisses $(1-h)$ et $(1+h)$ ont même ordonnée quelque soit la valeur de h.
On en déduit que ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe d'équation $x=1$.

Correction 10

1. a. En regardant le dessin, on remarque que :
- la baguette de bois est utilisée sur toute la longueur du cadre ;

- la baguette de bois n'est pas utilisée sur toute la largeur.

La longueur totale de la baguette de bois utilisée doit être de $100\,cm$:

$$x+(y-6)+x+(y-6)=100$$
$$2x+2y-12=100$$
$$x+y-6=50$$
$$y=50-x+6$$
$$y=56-x$$

b. La variable x représente la longueur du cadre, ainsi sa valeur doit être strictement positive mais pour que l'intérieur du cadre existe et soit non-vide, il est nécessaire qu'il soit strictement positive à $6\,cm$:

$$x\geqslant 6\,cm$$

Le même raisonnement sur la variable y qui représente la largeur de ce cadre, on obtient :

$$y>6$$
$$56-x>6$$
$$-x>6-56$$
$$-x>-50$$
$$x<50$$

Ainsi, dans ce problème, la variable x appartient à l'intervalle $\big]6\,;50\big[$.

2. L'intérieur du cadre est un rectangle dont les dimensions sont $(x{-}6)$ et $(y{-}6)$. Ainsi, l'intérieure du cadre a pour aire :

$$\mathcal{A}(x)=(x-6)(y-6)=(x-6)\big[(56-x)-6\big]$$
$$=(x-6)(50-x)=50x-x^2-300+6x$$
$$=-x^2+56x-300$$

3. a. Développons l'expression :

$$-\big(x-28\big)^2+484=-\big(x^2-56{\cdot}x+784\big)+484$$
$$=-x^2+56{\cdot}x-784+484=-x^2+56{\cdot}x-300$$
$$=\mathcal{A}(x)$$

b. L'expression de la fonction $\mathcal{A}$ est un polynôme du second degré qui admet les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{56}{2\times(-1)}=28$
- $\mathcal{A}(28)=-28^2+56\times28-300=484$

Le coefficient du second degré étant strictement négatif, on obtient le tableau de variation suivant :

x	6		28		50
Variation de $\mathcal{A}$	0	$\nearrow$	484	$\searrow$	0

c. On en déduit que l'aire maximale du tableau est atteinte pour $x=28\,cm$ et qu'alors son aire est de $484\,cm^2$.

Correction 11

1. a. On a les mesures suivantes :

$$AB=x+3\quad;\quad BC=y+6\quad;\quad CD=x+3$$

On en déduit la longueur totale de la clotûre :

$$\mathcal{L}=AB+BC+CD=x+3+y+6+x+3$$
$$=2x+y+12=2x+y+12$$

2. a. On a l'égalité suivante :

$$\mathcal{L}=100$$
$$2x+y+12=100$$
$$y=100-2x-12$$
$$y=88-2x$$

y représentant un nombre positif, on a les inégalités suivantes :

$$y>0$$
$$88-2x>0$$
$$-2x>-88$$
$$x<\frac{-88}{-2}$$
$$x<44$$

b. L'aire de jeu est un rectangle de dimensions x et y, ainsi son aire a pour valeur :

$$\mathcal{A}(x)=x{\times}y=x{\cdot}\big(88-2x\big)=88{\cdot}x-2{\cdot}x^2$$

3. a. On a les transformations algébriques suivantes :

$$968-2(x-22)^2=968-2\big(x^2-44x+484\big)$$
$$=968-2x^2+88x-968=-2x^2+88x=\mathcal{A}(x)$$

b. Soit a et b deux nombres appartenant à l'intervalle $\big]0\,;\,22\big]$ tels que $a{<}b$. On a les comparaisons suivantes :

$$a<b<22$$
$$a-22<b-22<0$$

Deux nombres négatifs et leurs carrés sont ordonnées dans le sens contraire :

$$\big(a-22\big)^2>\big(b-22\big)^2$$
$$-2{\cdot}\big(a-22\big)^2<-2{\cdot}\big(b-22\big)^2$$
$$968-2{\cdot}\big(a-22\big)^2<968-2{\cdot}\big(b-22\big)^2$$
$$\mathcal{A}(a)<\mathcal{A}(b)$$

c. L'expression définissant la fonction $\mathcal{A}$ est un polynôme du second degré admettant les deux valeurs suivantes particulières :

- $-\dfrac{b}{2{\cdot}a}=-\dfrac{88}{2\times(-2)}=\dfrac{88}{4}=22$
- $\mathcal{A}(22)=88\times22-2\times22^2=1936-2\times484$
  $=1936-968=968$

Le coefficient du terme du second degré est négatif, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		22		44
Variation de $\mathcal{A}$	0	$\nearrow$	968	$\searrow$	0

4. D'après le tableau de variation de la question précédente, on en déduit que la valeur maximale de l'aire est réalisée pour $x{=}22$; alors y a pour valeur :

$$y=88-2\times22=88-44=44$$

L'aire de jeu est un rectangle dont la longueur $44\,cm$ et de largeur $22\,m$.

Correction 12

1. Cherchons le nombre de place occupé sur le manège en fonction en fonction d'un prix x fixé :

- L'augmentation de prix relativement au 1 € s'obtient

à l'aide de l'expression :
$x-1$

- Pour chaque augmentation de 0,50 €, la fréquentation baisse de 5 clients ; ainsi, pour chaque augmentation de 1 €, la fréquence baisse de 10 clients.

Ainsi par proportionnalité, le nombre de clients en fonction du prix x d'une place est donné par la relation :
$70-(x-1)\times10=80-10x$

Ainsi, le prix d'une place étant de x €, la recette d'un tour est donnée par :
$\mathcal{R}(x)=x\left(80-10x\right)=80x-10x^2$

2. a. La fonction $\mathcal{R}$ est une fonction du second degré admettant les valeurs particulières suivantes :

- $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{80}{-20}=4$
- $\mathcal{R}(4)=80\times4-10\times4^4=320-160=160$

Le coefficient du terme de degré 2 étant négatif, on obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	80	↘ $-\infty$

b. La recette maximale que peut réaliser cet attraction sur un tour est de 160 € et elle sera réalisée lorsque le prix d'un billet sera fixé à 4 €.

3. a. Le développement donne :
$\left(x-4\right)^2-1=x^2-8x+16-1=x^2-8x+15$
Ainsi, l'expression $\mathcal{R}(x)$ admet pour forme canonique :
$\mathcal{R}(x)-150=-10x^2+80x-150$
$=-10\left(x^2-8x+15\right)=-10\left[(x-4)^2-1\right]$

b. On a la factorisation :
$\left(x-4\right)^2-1^2=\left(x-4+1\right)\left(x-4-1\right)$
$=\left(x-3\right)\left(x-5\right)$
Factorisons l'expression $\mathcal{R}(x)-150$:
$\mathcal{R}(x)-150=-10\left[(x-4)^2-1\right]$
$=-10\left(x-3\right)\left(x-5\right)$

c. Résolvons l'équation suivante :
$$\mathcal{R}(x)=150$$
$$\mathcal{R}(x)-150=0$$
$$-10\left(x-3\right)\left(x-5\right)=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. On en déduit les deux équations suivantes :

$x-3=0$	$x-5=0$
$x=3$	$x=5$

Cette équation admett pour ensemble de solutions : $\mathcal{S}=\left\{3\,;\,5\right\}$.

d. On peut modifier le tableau de variation de la fonction $\mathcal{R}$ de la façon suivante :

x	$-\infty$	3	4	5	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	150 ↗	160	↘ 150	↘ $-\infty$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\mathcal{R}(x)\geqslant150$ est :
$\left[3\,;\,5\right]$.

Correction 13

1. a. Etablissons l'identité :
$$2\cdot\left[\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{225}{4}\right]=2\cdot\left(x^2-9\cdot x+\frac{81}{4}+\frac{225}{4}\right)$$
$$=2\cdot\left(x^2-9\cdot x+\frac{306}{4}\right)=2\cdot x^2-18\cdot x+\frac{306}{2}$$
$$=2\cdot x^2-18\cdot x+153$$

b. De la relation $BD{+}CE{=}10\,m$, on en déduit la relation :
$x+y=10$
Le triangle ADE est un triangle rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on obtient l'égalité :
$$DE^2=AD^2+AE^2=(3+x)^2+(2+y)^2$$
$$=9+6\cdot x+x^2+4+4\cdot y+y^2$$
$$=x^2+y^2+6\cdot x+4\cdot y+13$$
D'après la relation : $y{=}10{-}x$
$$=x^2+(10-x)^2+6\cdot x+4\cdot(10-x)+13$$
$$=x^2+100-20\cdot x+x^2+6\cdot x+40-4\cdot x+13$$
$$=2x^2-18\cdot x+153$$
D'après la question a. :
$$=2\cdot\left[\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{225}{4}\right]$$
Le carré d'un nombre étant toujours positif ou nul, on a la comparaison :
$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2\geqslant0$$
$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{225}{4}\geqslant\frac{225}{4}$$
$$2\cdot\left[\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{225}{4}\right]\geqslant\frac{225}{2}$$
$$DE^2\geqslant\frac{225}{2}$$
$$DE\geqslant\sqrt{\frac{225}{2}}$$
Ainsi, la distance DE est minoré par $\sqrt{\dfrac{225}{2}}$ et cette valeur est atteinte pour $x{=}\dfrac{9}{2}$. On en déduit que le minimum de la distance DE est atteinte pour :
$x{=}\dfrac{9}{2}\ ;\ y=10-\dfrac{9}{2}=\dfrac{11}{2}$

2. Le triangle ABC étant rectangle en A, a pour mesure :
$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{3\times2}{2}=3\,m^2$$
Le triangle ADE étant rectangle en A, a pour mesure :
$$\mathcal{A}_{ADE}=\frac{AD\times AE}{2}=\frac{\left(3+x\right)\left(2+y\right)}{2}$$

L'aire de la partie hachurée a pour mesure $15\,m^2$. Cette condition s'exprime par :

$$\mathcal{A}_{ADE} - \mathcal{A}_{ABC} = 15$$

$$\frac{(3+x)(2+y)}{2} - 3 = 15$$

$$2\cdot\Big(\frac{(3+x)(2+y)}{2} - 3\Big) = 30$$

$$(3+x)(2+y) - 6 = 30$$

$$(3+x)(2+y) - 6 - 30 = 0$$

D'après la relation, on a : $y = 10 - x$

$$(3+x)\big[2+(10-x)\big] - 36 = 0$$

$$(3+x)(12-x) - 36 = 0$$

$$36 - 3\cdot x + 12\cdot x - x^2 - 36 = 0$$

$$-x^2 + 9\cdot x = 0$$

$$x\cdot(9-x) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

On en déduit les deux solutions de l'équation :

$x=0$; $x=9$

La valeur $x=0$ ne peut être retenue car dans ce cas, les points B et D serait confondus ce qui contredit la condition $D\notin[AB]$.

Ainsi, pour réaliser une aire de $15\,m^2$ de la surface hachurée, il est nécessaire d'avoir :

$x=9$; $y=1$