Système de 2 équations à 2 inconnues

$$(S)\quad \begin{cases} 7x + 4y = 7 \\ 3x = 2 - y \end{cases}$$

(S) est un système de deux équations à deux inconnues x et y .
Résoudre le système (S), c'est trouver le couple de nombres $(x;\, y)$ qui vérifient les deux équations en même temps. Un tel couple est solution du système.

✓ *Tester des égalités :*

→ Le couple (1 ; 0) n'est pas solution car il vérifie la première équation mais pas la seconde.
En effet : $7 \times 1 + 4 \times 0 = 7 + 0 = 7$ mais $3 \times 1 = 3$ et $2 - 0 = 2$
Le couple (1 ;0) n'est pas solution de la deuxième équation donc n'est pas solution du système.

→ Le couple (0,2 ; 1,4) est solution du système car il vérifie les deux équations.
En effet $7 \times 0{,}2 + 4 \times 1{,}4 = 1{,}4 + 5{,}6 = 7$
$3 \times 0{,}2 = 0{,}6$ et $2 - 1{,}4 = 0{,}6$
Le couple (0,2 ;1,4) est solution des deux équations en même temps, donc solution du système *(S).*

I- Résolution de système de 2 équations à 2 inconnues par substitution

Nous savons résoudre une équation à une inconnue (voir chap. équation) donc le but, lors de la résolution d'un système d'équations, est de se ramener à la résolution d'équations à une inconnue.

Méthode par substitution :

Ecrire une des deux inconnues en fonction de l'autre dans l'une des deux équations et remplacer cette inconnue par l'expression ainsi trouvée dans l'autre équation. Résoudre alors cette équation qui est une équation à une inconnue.

Exemple :
Résoudre le système $\begin{cases} 7x + 4y = 7 & (1) \\ 3x + y = 2 & (2) \end{cases}$ qui est aussi le système *(S)* ci-dessus.

Dans l'équation (2), nous avons déjà le terme y donc nous allons l'exprimer en fonction de x.

Etape 1 :
expression de y en fonction de x, dans l'équation (2)
$3x + y = 2$
$\boxed{y = 2 - 3x}$

Etape 2 :
on remplace y par 2 – 3x dans l'équation (1) puis on résout l'équation
$7x + 4y = 7$
$7x + 4(2 - 3x) = 7$
$7x + 8 - 12x = 7$
$-5x + 8 = 7$
$-5x = -1$
$\boxed{x = \frac{1}{5}}$

Etape 3 :
Calcul de y ; utiliser l'expression de l'étape 1 .
$y = 2 - 3x$
$y = 2 - 3 \times \frac{1}{5}$
$y = \frac{10}{5} - \frac{3}{5}$
$\boxed{y = \frac{7}{5}}$

Vérification : *Equation (1)* : $7 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{7}{5} = \frac{35}{5} = 7$ et *Equation (2)* : $3 \times \frac{1}{5} + \frac{7}{5} = \frac{10}{5} = 2$

Conclusion : Le système a donc une seule solution le couple $\left(\frac{1}{5} ; \frac{7}{5}\right)$

II - Problème et système d'équations :

Lors de la résolution d'un problème où on cherche deux grandeurs numériques qui sont liées, on est amené à résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues.

Exemple : J'ai acheté 7 croissants et 4 tartes au chocolat. Cela m'a coûté 7 euros.
Mon frère, lui, a acheté 3 croissants et une tarte au chocolat et n'a payé que deux euros.
Quel est le prix d'un croissant et d'une tarte au chocolat ?

Comme pour toute résolution de problème, nous devons effectuer une démarche en trois étapes.

1ère étape: la mise en équations du problème. Nous recherchons deux prix.
Nous allons nommer x le prix en euros d'un croissant et y celui d'une tarte au chocolat.
« 7 croissants et 4 tartes au chocolat au coût de 7 euros » se traduit par $7x + 4y = 7$.
« 3 croissants et une tarte au chocolat au coût de 2 euros » se traduit par $3x + y = 2$.
Donc on doit résoudre le système : $\begin{cases} 7x + 4y = 7 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

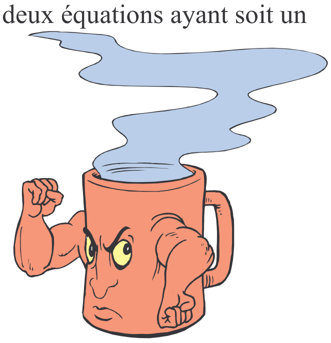
2ème étape : la résolution du système .

D'après ci-dessus, le couple solution du système est le couple$\left(\frac{1}{5} ; \frac{7}{5}\right)$, soit (0,2 ; 1,4).

3ème étape : la conclusion au problème (voir si les solutions trouvées lors de la résolution du système sont valides ou non. Si ce n'est pas le cas, conclure que le problème n'a pas de solution.)
Ici on conclut que le croissant coûte 0,2€ et la tarte au chocolat 1,4 €.

III méthode de Gauss

Le principe utilisé est qu'on ne change pas les solutions d'une équation si on multiplie chacun de ses membres par un même nombre non nul. Ainsi on se ramènera, en modifiant une équation ou les deux, à l'obtention de deux équations ayant soit un nombre opposé de termes en x ou bien en y.



Exemple : **résoudre le système** $\begin{cases} 5x + 2y = 6 & (1) \\ 6x + 4y = 7 & (2) \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x + 2y = 6 & (1) \\ 6x + 4y = 7 & (2) \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \times\ 2 \\ \times\ (-1) \end{array}$$

$$\begin{cases} 10x + 4y = 12 & (1') \\ -6x - 4y = -7 & (2') \end{cases}$$

✓ *on additionne les deux équations (1') et (2')*
(on obtient ainsi une équation où ne figurent que les termes en x puisque les termes en y se simplifient)
donc :

$$10x + 4y - 6x - 4y = 12 - 7$$
$$4x = 5$$
$$\boxed{x = \frac{5}{4}}$$

✓ *Pour obtenir y, on remplace x par $\frac{5}{4}$ dans l'une des deux équations initiales.* *Calcul de y : équation (1) : $5x + 2y = 6$*

$$5 \times \frac{5}{4} + 2y = 6$$
$$\frac{25}{4} + 2y = 6$$
$$2y = 6 - \frac{25}{4}$$
$$2y = -\frac{1}{4}$$
$$\boxed{y = \frac{-1}{8}}$$

Vérification : équation (1) : $5\times \frac{5}{4} + 2\times\frac{-1}{8} = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{24}{4} = 6$ *et* équation (2) : $6\times \frac{5}{4} + 4\times \frac{-1}{8} = \frac{30}{4} - \frac{2}{4} = \frac{28}{4} = 7$

Conclusion : *le système a pour unique solution le couple* $\left(\frac{5}{4} ; \frac{-1}{8}\right)$

Remarque : résolution de ce système avec la méthode par substitution : $\begin{cases} 5x + 2y = 6 & (1) \\ 6x + 4y = 7 & (2) \end{cases}$

1ère étape :
on va exprimer y en fonction de x dans l'équation (1)
$5x + 2y = 6$
$2y = 6 - 5x$
$\boxed{y = \frac{6 - 5x}{2}}$

2ème étape :calcul de x
On remplace y par l'expression $\frac{6 - 5x}{2}$ *dans l'équation (2)*
$6x + 4\times\left(\frac{6 - 5x}{2}\right) = 7$
$6x + 12 - 10x = 7$
$-4x + 12 = 7$
$-4x = -5$
$\boxed{x = \frac{5}{4}}$

ème étape :calcul de y :
$y = \frac{6 - 5x}{2}$
$y = \frac{6 - 5 \times \frac{5}{4}}{2}$
$y = \frac{\frac{-1}{4}}{2}$
$\boxed{y = \frac{-1}{8}}$ *+ vérification et conclusion*