binomiale

Exercice 1

On considère une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 9 et 0,3 : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(9\,;0{,}3)$

Le tableau ci-dessous donne des informations sur la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,04	0,196	0,463	0,73	0,901	0,975	0,996	1,0	1,0	1,0

Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a au moins 95 % de chance de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;5]$.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 9 et 0,5 : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(9\,;0{,}5)$

Les deux tableau ci-dessous donne des informations sur la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,002	0,02	0,09	0,254	0,5	0,746	0,91	0,98	0,998	1,0

1. Pour quelles valeurs de k a-t-on : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)>0{,}025$?
2. Pour quelles valeurs de k a-t-on : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)\geqslant 0{,}975$?
3. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ au moins 95 % de chance de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[2\,;7]$.

Exercice 3

Une société affirme que 80 % de ses clients sont satisfaits par ses produits.

1. Une association de consommateurs souhaite vérifier cette alégation et commande une étude portant sur 50 clients de cette société.
   a. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.
   b. L'étude obtient un taux de satisfaction de 71 %. Selon cette étude, que peut-on dire de l'affirmation de la société au seuil de 5 % ?
2. L'association renouvelle son étude qui porte cette fois sur 100 clients. Cette nouvelle étude obtient toujours un taux de satisfaction de 71 %.
   Que peut-on dire de l'affirmation de la société au seuil de 5 %.

Exercice 4

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 100 et 0,35 ($\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(100\,;0{,}35)$).

Les questions suivantes sont à traiter à l'aide de la calculatrice et les résultats doivent être donnés, si nécessaire, au millième près :

1. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=43)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 38)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 31)$
2. a. Déterminer la valeur des plus petits entiers a et b vérifiant les deux conditions suivantes :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a) > 0{,}025$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}975$
   b. Donner l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence associée à la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice 5

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 30 et 0,32 : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(30\,;0{,}32)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0	0	0,001	0,005	0,018	0,049	0,11	0,208	0,341

k	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,494	0,645	0,774	0,871	0,934	0,97	0,988	0,995	0,999

k	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

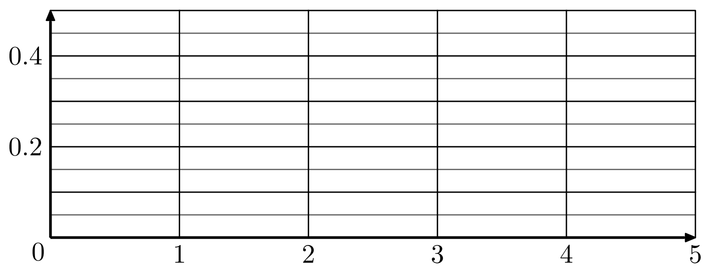
1. Déterminer les plus petits entiers a et b tels que :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a) > 0{,}025$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}975$
2. Justifier que : $\mathcal{P}(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}95$
3. En notant $F=\dfrac{\mathcal{X}}{30}$ la variable aléatoire qui représente la fréquence aléatoire du succés. Justifier que :
   $\mathcal{P}\Big(\dfrac{a}{30}\leqslant F\leqslant\dfrac{b}{30}\Big) \geqslant 0{,}95$

Exercice 6

1. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}5$.

   Dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
2. On considère la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}3$.

   Dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.
3. Dans le repère ci-dessous, placer les points :
   $\big(k\,;\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)\big)$ et $\big(k\,;\mathcal{P}(\mathcal{Y}=k)\big)$
   pour k allant de 0 à 5.



Exercice 7

Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été, il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.

Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\dfrac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.

Une somme de 1 crédit *(la monnaie locale)* est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.

Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.

Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. Evidemment si les 13 groupes inscrits se présent, le 13^{e} groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédit à l'association.

Les probabilités demandées seront arrondies au 100^{e} *le plus proche.*

1. Quelle est la probabilité P_{13} qu'un jour donné, il n'y ait pas de désistement, c'est à dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade ?

2. Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.
Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.

3. Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :
$$\left(\sum_{k=0}^{13} k\cdot\binom{13}{k}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}\right) - 2\cdot P_{13}$$
Calculer ce gain.

4. La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association ?

Exercice 8

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites *(A, B et C)*, une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot "*BBAAC*" signifie que le candidat a répondu B qux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. Combien y-a-t-il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?

2. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

   Calculer la probabilité des évènements suivants :

   a. E : "*le candidat a exactement une réponse exacte.*".

   b. F : "*le candidat n'a aucune réponse exacte*".

   c. G : "*le mot-réponse du candidat est un palindrome*".
   (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, "BACAB" est un palindrome)

binomiale

Correction 1

D'après le tableau précédent, on a la probabilité :

$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 5) \simeq 0{,}975$

Ainsi, la probabilité à la variable aléatoire $\mathcal{X}$ de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;5]$ est supérieure à 97 %, validant ainsi l'assertion de l'énoncé.

Correction 2

1. D'après le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$, pour toute valeur de k appartenant à l'ensemble $[2\,;9]$ vérifie :

$$k\in\{2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)>0{,}025$$

2. D'après le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$, pour toute valeur de k appartenant à l'ensemble $[2\,;9]$ vérifie :

$$k\in\{7\,;8\,;9\} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)\geqslant 0{,}975$$

3. Les deux ensembles $\{0\leqslant\mathcal{X}\leqslant 1\}$ et $\{2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 7\}$ étant disjoints, on en déduit l'égalité :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\Big(\{0\leqslant\mathcal{X}\leqslant 1\}\cup\{2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 7\}\Big) &= \mathcal{P}\{0\leqslant\mathcal{X}\leqslant 1\}+\mathcal{P}(2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 7)\\
\mathcal{P}(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant 7) &= \mathcal{P}\{0\leqslant\mathcal{X}\leqslant 1\}+\mathcal{P}(2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 7)\\
\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 7) &= \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 1)+\mathcal{P}(2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 7)\\
\mathcal{P}(2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 7) &= \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 7)-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 1)
\end{aligned}$$

Puisque l'entier 1 ne vérifie pas la condition imposée par la question 1., on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 1) &\leqslant 0{,}025\\
-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 1) &\geqslant -0{,}025\\
\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 7)-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 1) &\geqslant \mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 7)-0{,}025
\end{aligned}$$

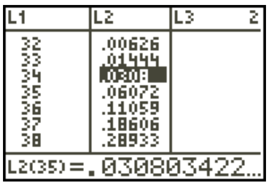
D'après les résultats de la question 2. :

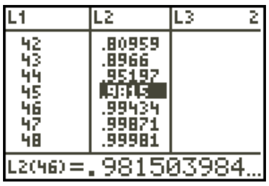
$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 7)-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 1) &\geqslant 0{,}975-0{,}025\\
\mathcal{P}(2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 7) &\geqslant 0{,}95
\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ prenne ses valeurs dans l'intervalle $[2\,;7]$ est supérieure ou égale à 95 %

Correction 3

1. a. Après avoir saisi les informations relatives à une variable aléatoire suivant une loi binomiale, on obtient les deux captures d'écran suivantes :



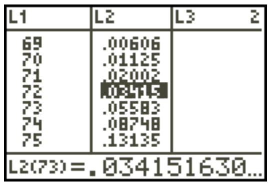


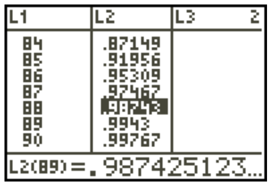
Ainsi, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est donné par :

$$I=\Big[\frac{34}{50}\,;\frac{45}{50}\Big]=[0{,}68\,;0{,}9]$$

b. La fréquence de 0,71 obtenue par cette étude rendre dans le cadre du modèle théorique au seuil de 5 %.

2. On a les deux captures d'écran suivantes :





L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est alors :

$$J'=\Big[\frac{72}{100}\,;\frac{88}{100}\Big]=[0{,}72\,;0{,}88].$$

Ainsi, cette étude doit être rejetée avec un seuil d'erreur de 5 %.

Correction 4

1. a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=43) \simeq 0{,}021$

b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 38) \simeq 0{,}770$

c. Les deux évènements $\{\mathcal{X}<31\}$ et $\{\mathcal{X}\geqslant 31\}$ sont complémentaires. On en déduit l'égalité :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 31) &= 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}<31) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 30)\\
&= 1-0{,}173 = 0{,}827
\end{aligned}$$

2. a. A l'aide de la calculatrice, on a :

- 26 est le plus petit entier naturel a vérifiant l'inégalité :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a) > 0{,}025$
- 44 est le plus petit entier naturel b vérifiant l'inégalité :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}975$

b. Ainsi, l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence associée à la variable aléatoire $\mathcal{X}$ est :

$$I=\Big[\frac{26}{100}\,;\frac{44}{100}\Big]=[0{,}26\,;0{,}44].$$

Correction 5

1.
- D'après le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$, on en déduit que la plus petite valeur de a vérifiant l'inégalité $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a)>0{,}025$ a pour valeur :
$a=5$
- Le plus petit entier b réalisant l'inégalité $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant b)\geqslant 0{,}975$ a pour valeur $b=15$

2. 4 ne vérifiant l'inégalité $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a)>0{,}025$, on en déduit l'inégalité :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 4) &\leqslant 0{,}025\\
-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 4) &\geqslant -0{,}025\\
\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 15)-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 4) &\geqslant 0{,}975-0{,}025\\
\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 15)-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 4) &\geqslant 0{,}95\\
\mathcal{P}(5\leqslant\mathcal{X}\leqslant 15) &\geqslant 0{,}95
\end{aligned}$$

3. On a l'équivalence des encadrements suivants :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{30} \leqslant\ & F \leqslant \frac{b}{30}\\
30\times\frac{a}{30} \leqslant\ & 30\times F \leqslant 30\times\frac{b}{30}\\
a \leqslant\ & \mathcal{X} \leqslant b
\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité des deux ensembles suivants :

$$\Big\{\omega\in\Omega \;\Big|\; a\leqslant\mathcal{X}(\omega)\leqslant b\Big\} = \Big\{\omega\in\Omega \;\Big|\; \frac{a}{30}\leqslant F\leqslant\frac{b}{30}\Big\}$$

Ainsi, on obtient la probabilité suivante :

$\mathcal{P}\left(\frac{a}{30} \leqslant F \leqslant \frac{b}{30}\right) \geqslant 0{,}95.$

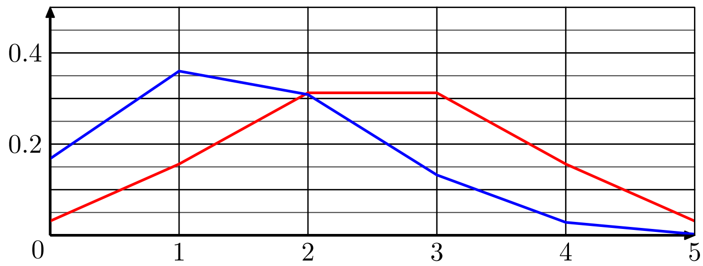
Correction 6

Les deux tableaux ci-dessous représentent les deux lois de probabilités des variables aléatoires $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ arrondies à 10^{-4} près :

k	0	1	2	3	4	5
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	0,0313	0,1563	0,3125	0,3125	0,1563	0,0313

k	0	1	2	3	4	5
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	0,1681	0,3601	0,3087	0,1323	0,0284	0,0024

Voici la représentation graphique de ces deux lois de probabilités :



Correction 7

1. Le fait qu'un groupe se présente à l'activité représente une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{7}{8}$.

   Considérons la variable aléatoire $\mathcal{X}$ comptant le nombre de groupe se preśentant à l'activité. Comme les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns les autres à leur activité, on assimile cette expérience à un tirage successif avec remise de l'épreuve de Bernoulli : nous sommes en face d'un schéma de 13 épreuves de Bernoulli de paramètre $\frac{7}{8}$.

   Ainsi, la variable $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres 13 et $\frac{7}{8}$.

   La probabilité que les 13 groupes se présentent est de :

   $\mathcal{P}(\mathcal{X}=13) = \binom{13}{13} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{13} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{0} = \left(\frac{7}{8}\right)^{13}$

2. La variable aléatoire R prend deux valeurs 0 et 2. Ainsi, l'espérance mathématique de cette variable aléatoire a pour valeur :

   $E(R) = 0 \cdot \mathcal{P}(R=0) + 2 \cdot \mathcal{P}(R=2) = 2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{13}$

3. Considérons de nouveau la variable aléatoire X, pour un évènement réalisant $\{\mathcal{X}=k\}$, l'association encaisse k crédits ; ainsi, en moyenne, l'association perçoit :

   $\sum_{k=0}^{13} k \cdot \binom{13}{k} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}$

   Or, ce calcul représente l'espérance mathématique de la variable $\mathcal{X}$. Puisque la variable aléatoire suit une loi binomiale, on a :

   $E(\mathcal{X}) = n \cdot p = 13 \times \frac{7}{8} = \frac{91}{8}$

   Et l'association perd 2 Crédits seulement lorsque les 13 groupes se présentent ; ainsi, la perte moyenne est de :

   $2 \cdot \mathcal{P}(\mathcal{X}=13) = 2 \cdot \mathcal{P}_{13} = 2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{13}$

   Ainsi, le gain moyen de l'association est donné par :

   $\sum_{k=0}^{13} k \cdot \binom{13}{k} \cdot \left(\frac{13}{k}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{13-k} - 2 \cdot P_{13}$

   $= \frac{91}{8} - 2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{13} \simeq 11{,}02$

4. Si le dirigeant prennait que 12 inscriptions, alors le problème se résumerait à une variable binomiale de paramètres 12 et $\frac{7}{8}$ qui admettrait pour espérance mathématique :

   $12 \times \frac{7}{8} = \frac{21}{2} = 10{,}5$

   Ainsi, la décision du dirigeant permet à l'association, en moyenne, de gagner plus de Crédits.

Correction 8

1. Le choix des réponses dans ce questionnaire correspond à un tirage avec remise à cinq tirages à trois choix.

   Ainsi, le nombre de réponses possibles sont au nombre de :

   $3^5 = 243$

2. Répondant au hasard aux questions, la probabilité de répondre correctement à une réponse est de :

   $\frac{1}{3}$

   C'est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.

   Répétant cela, de manière indépendante, sur les cinq questions, on est face à un schéma de 5 épreuves de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.

   Notons $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associant à chaque expŕérience, le nombre de bonnes réponses. La variable $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $\left(5\,;\frac{1}{3}\right)$.

   Ainsi, on a les probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$

   $= 3 \times \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$

   b. $\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$

   c. Pour créer un tel palindrome, il suffit de choisir les trois premières lettres : les deux dernières sont alors imposées par les deux premières.
   Ainsi, le nombre de palindromes dépend du nombre de possibilités sur les trois premières lettres :

   3^3

   Ainsi, on a la probabilité suivante :

   $\mathcal{P}(G) = \frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$