1 Différentes expressions du produit scalaire

1.1 Norme d'un vecteur

Définition : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et A, B deux points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
On appelle norme de $\overrightarrow{u}$ la longueur AB et on note : $\|\overrightarrow{u}\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.
On dit que $\overrightarrow{u}$ est unitaire si $\|\overrightarrow{u}\| = 1$.

Propriété : Norme d'un vecteur
Dans un repère $\left(O\,;\overrightarrow{\imath}\,;\overrightarrow{\jmath}\right)$ *orthonormé*, la norme du vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

1.2 Définition triangulaire du produit scalaire

Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.
On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ et défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right]$$

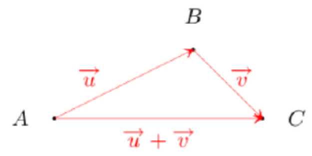


FIGURE 1 – Définition triangulaire du produit scalaire

1.3 Expression du produit scalaire dans un repère orthonormé

Propriété : Soit $(O\,;\overrightarrow{\imath}\,;\overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormé.
Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

1.4 Expression à l'aide de projections

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. On appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB). Alors :
— Si H et B sont du même côté de A (voir figure 2), alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = AB \times AH$;
— Si H et B sont de part et d'autre de A (voir figure 3), alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -AB \times AH$.
— Si H et A sont confondus, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

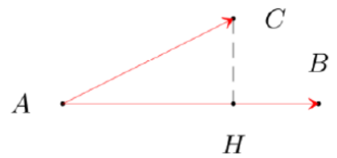


FIGURE 2 – Expression à l'aide de projections – Cas 1

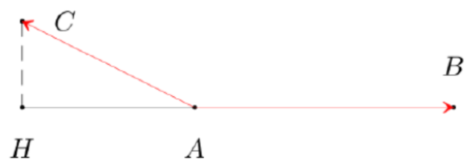


FIGURE 3 – Expression à l'aide de projections – Cas 2

1.5 Expression trigonométrique

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v})$$

2 Règles de calcul sur le produit scalaire

Propriété 1 : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$$

Remarque : On dit que le produit scalaire est commutatif. Cette propriété est évidente à montrer à l'aide de la définition triangulaire du produit scalaire.

Propriété 2 : Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et k un nombre réel.

1. $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
2. $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k\times(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k\times(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

Remarques :

1. On dit que le produit scalaire est bilinéaire. Cette propriété est simple à montrer en utilisant la définition du produit scalaire dans un repère orthonormé.

3 Produit scalaire et orthogonalité

3.1 Vecteurs orthogonaux

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On note A, B, C et D les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Conséquences :

1. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.
2. Soit $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j})$ un repère orthonormé.Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy' = 0$.

4.1 Vecteur normal à une droite

Définition : Soit $\mathcal{D}$ une droite.
On dit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$ si la direction de $\overrightarrow{n}$ est orthogonale à $\mathcal{D}$.

Propriété : Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax+by+c=0$.
Alors, le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$.

4.2 Droites perpendiculaires

Propriété : Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax+by+c=0$ et $\mathcal{D}'$ la droite d'équation $a'x+b'y+c'=0$.
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa'+bb'=0$.

Remarque : Si la droite $\mathcal{D}$ admet comme équation réduite $y = mx+p$ et la droite $\mathcal{D}'$ comme équation réduite $y = m'x+p'$ alors la propriété devient :

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.

Définition
Soient Ω un point du plan et R un nombre positif.
Le cercle de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = R$

On a donc $\Omega M^2 = R^2$, et si $M(x, y)$ et $\Omega(a, b)$, on retrouve l'équation cartésienne d'un cercle :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Théorème .
Soient deux points A et B du plan, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Formules d'addition, de soustraction et de duplication des cosinus et sinus

Pour tout nombre réel a et b,

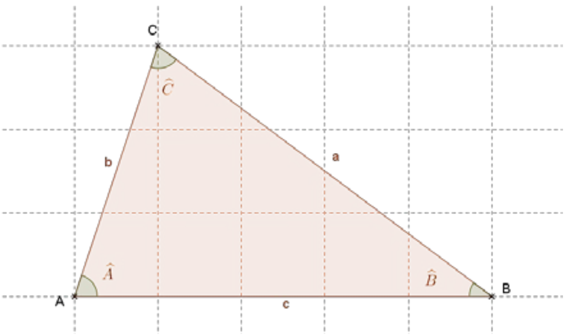
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Pour tout nombre réel a,

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

Application à la géométrie traditionnelle

Le *théorème d'al-Kashi* s'énonce de la façon suivante :



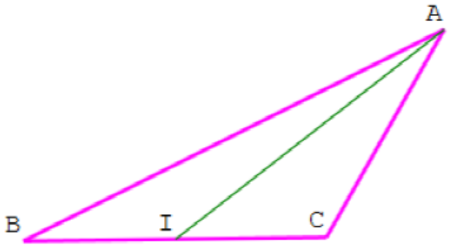
Soit un triangle ABC, dans lequel on utilise les notations usuelles exposées sur la figure ci-dessus.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$$

Théorème de la médiane



Etant donné un triangle ABC, I le milieu du segment [BC] alors :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + BC^2/2.$$