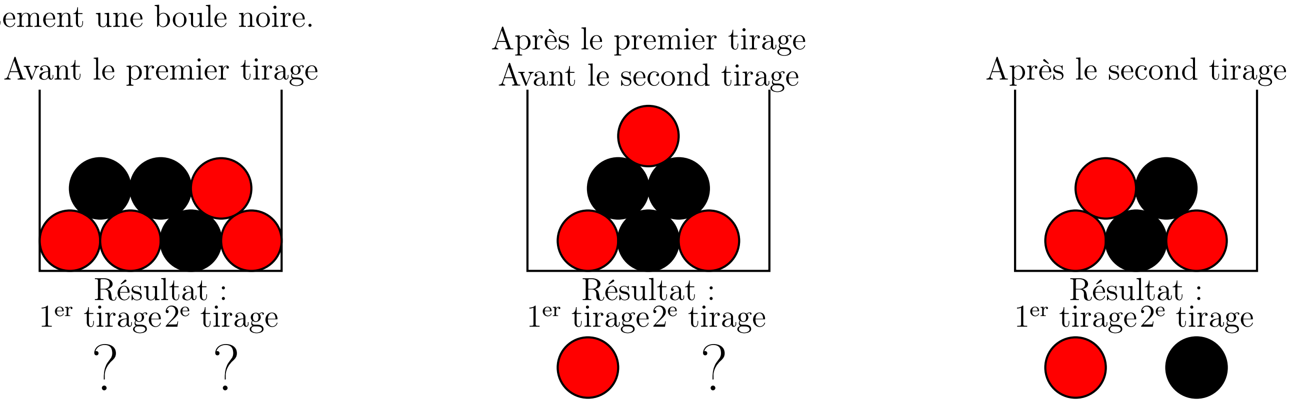
1 Brefs rappels sur les règles d'utilisation d'un arbre pondéré

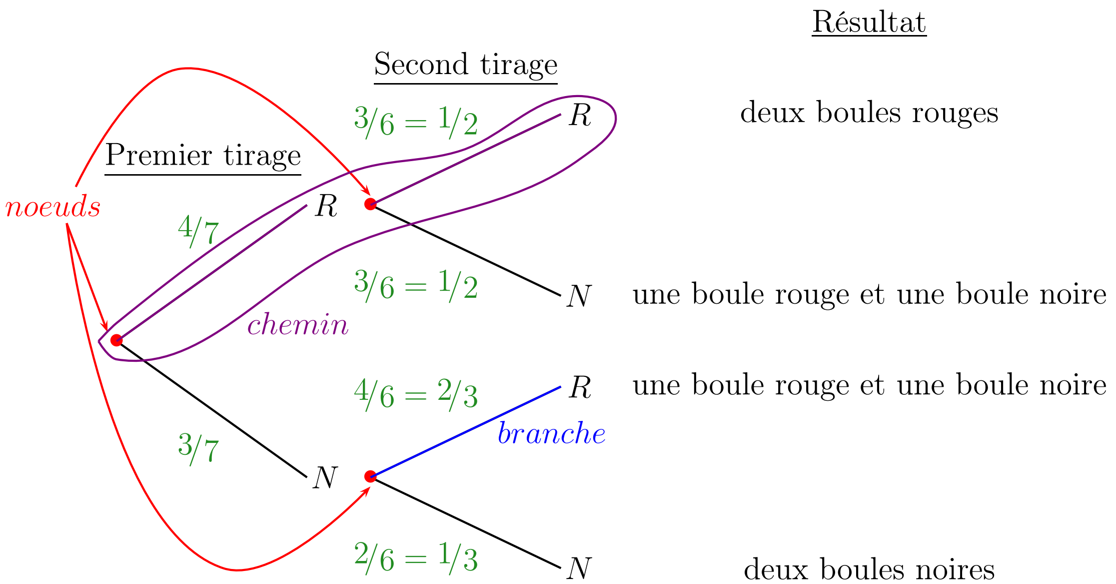
Dans de multiples situations, on peut schématiser une expérience aléatoire par un arbre de probabilités (ou arbre pondéré).

Exemple : Une urne contient sept boules indiscernables au toucher, dont quatre sont de couleur rouge et trois de couleur noire.

On procède à deux tirages successifs, au hasard et sans remise, et on recherche la probabilité d'obtenir exactement une boule noire.



En convenant de symboliser par la lettre R le choix d'une boule rouge et par la lettre N celui d'une boule noire, l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé peut être schématisée par l'arbre ci-dessous :



L'arbre réalisé comporte exactement 3 noeuds, 6 branches et 4 chemins.

Règles d'utilisation d'un arbre pondéré

- **Règle 1 :** La somme des probabilités issues d'un même noeud est égale à 1.
- **Règle 2 (Principe multiplicatif) :** La probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités portées par les branches de ce chemin.
- **Règle 3 :** La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à sa réalisation.

Dans notre exemple, exactement deux des quatre chemins conduisent à la réalisation de l'événement « On obtient exactement une boule noire. » et sa probabilité est : $\underbrace{\underbrace{\frac{\cancel{4}^{2}}{7}\times\frac{1}{\cancel{2}^{1}}}_{\text{règle 2 pour 1}^{\text{er}}\text{ chemin}} + \underbrace{\frac{\cancel{3}^{1}}{7}\times\frac{2}{\cancel{3}^{1}}}_{\text{règle 2 pour 2}^{\text{e}}\text{ chemin}}}_{\text{règle 3}} = \boxed{\frac{4}{7}}$

Remarque : Dans une situation pouvant être assimilée à des tirages successifs, il est important de savoir si ces tirages sont effectués avec ou sans remise.

Dans le cas de l'expérience décrite ci-dessus, si l'on choisit de remettre dans l'urne la boule obtenue au premier tirage avant de procéder au second, la probabilité de l'événement « On obtient exactement une boule noire. » n'est plus $\frac{4}{7} \approx 0{,}57$ (à 10^{-2} près) mais $\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{24}{49}\approx 0{,}49$ (à 10^{-2} près).

2 Variables aléatoires, espérance, variance et écart-type

Définition
Soit Ω l'ensemble fini des issues (appelé univers) d'une expérience aléatoire.
Définir une variable aléatoire sur Ω, c'est associer un réel à chaque issue de Ω.

Dans la suite du paragraphe, n désigne un entier naturel non nul, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et i un entier compris entre 1 et n.

Définitions
- L'événement « $X = x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x_i.
- Lorsqu'à chaque valeur x_i prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité de l'événement « $X = x_i$ », notée $P(X = x_i)$, on dit que l'on définit la loi de probabilité de X.
- La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est généralement présentée dans un tableau tel que celui ci-dessous, dans lequel les n réels p_1, p_2, …, p_n vérifient :
  - ★ $\forall i \in [\![1;n]\!] \quad 0 \leqslant p_i \leqslant 1$;
  - ★ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Valeurs x_i	x_1	x_2	…	x_n
Probabilités $P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

- On appelle espérance de X le réel noté $E(X)$ défini par $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.
- On appelle variance de X le réel positif $V(X)$ défini par $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$.
- On appelle écart-type de X le réel positif noté $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition (Formule de Koenig-Huygens)
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Remarques

① L'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire X s'expriment tous deux dans la même unité que les valeurs x_i prises par X.

② L'espérance d'une variable aléatoire X est égale à la moyenne des valeurs prises par X, pondérées par leurs probabilités ; elle peut s'interpréter comme la valeur moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois.

③ Dans le cadre d'un jeu, on dit que celui-ci est équitable lorsque l'espérance de gain est nulle.

Propositions
Soient a et b deux constantes réelles et X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.
En associant à chaque valeur x_i prise par X, le nombre $ax_i + b$, on définit une nouvelle variable aléatoire notée $aX+b$ dont l'espérance et la variance sont données par $E(aX+b) = aE(X)+b$ et $V(aX+b) = a^2V(X)$.

3 Répétition d'expériences identiques et indépendantes

Définition
Il y a répétition d'expériences identiques lorsque la même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois de suite.
Ces expériences aléatoires successives sont dites indépendantes lorsque le résultat obtenu à l'une de ces expériences ne dépend pas des résultats obtenus aux expériences précédentes.

Remarque : On représente la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré.

Proposition
Dans le cas d'une répétition d'expériences indépendantes, une issue est une liste de résultats de l'expérience aléatoire répétée et la probabilité de cette liste est égale au produit des probabilités de chacun des résultats de la liste.