suites

Correction 1

1. Voici synthétisé ci-dessous, le fonctionnement de l'algorithme :

$i = 0$	Afficher	$0 \times (0 - 1)$
$i = 1$	Afficher	$1 \times (1 - 1)$
$i = 2$	Afficher	$2 \times (2 - 1)$
$i = 3$	Afficher	$3 \times (3 - 1)$
$i = 4$	Afficher	$4 \times (4 - 1)$
$i = 5$	Afficher	$5 \times (5 - 1)$

Ainsi, les différentes valeurs affichées par l'algorithme sont :

$$0 ; 0 ; 2 ; 6 ; 12 ; 20$$

2. La suite (u_n) permettant d'obtenir ces six premiers termes est :

$$u_n = n \cdot (n - 1) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Correction 2

- a. Pour la suite (u_n) définie par $u_n = 2 \cdot n^2 - n + 1$, on a :

n	0	1	2	3	4
u_n	1	2	7	16	29

- b. Pour la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{2 \cdot n + 1}{2 - 3 \cdot n}$, on a :

n	0	1	2	3	4
v_n	$\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{5}{4}$	-1	$-\frac{9}{10}$

- c. Pour la suite (w_n) définie par $w_n = \sqrt{3n + 25}$, on a :

n	0	1	2	3	4
w_n	5	$2\sqrt{7}$	$\sqrt{31}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{37}$

- d. Pour la suite (x_n) définie par $x_n = 3 \cdot [1 + (-1)^n] + 2$, on a :

n	0	1	2	3	4
x_n	8	2	8	2	8

Correction 3

- Voici les termes de la suite (u_n) :

$$\Rightarrow u_0 = -1$$

$$\Rightarrow u_1 = f(u_0) = f(-1) = 1$$

$$\Rightarrow u_2 = f(u_1) = f(1) = -3$$

$$\Rightarrow u_3 = f(u_2) = f(-3) = 2$$

$$\Rightarrow u_4 = f(u_3) = f(2) = 2$$

$$\Rightarrow u_5 = f(u_4) = f(2) = 2$$

On comprend que la suite (u_n) est stationnaire à partir du rang 3. Ainsi, la suite (u_n) peut s'écrire sous la forme :

$$(-1 ; 1 ; -3 ; 2 ; 2 ; 2 ; \dots)$$

- Voici les termes de la suite (v_n) :

$$\Rightarrow v_0 = -4$$

$$\Rightarrow v_1 = f(v_0) = f(-4) = -2$$

$$\Rightarrow v_2 = f(v_1) = f(-2) = 4$$

$$\Rightarrow v_3 = f(v_2) = f(4) = 0$$

$$\Rightarrow v_4 = f(v_3) = f(0) = -2$$

$$\Rightarrow v_5 = f(v_4) = f(-2) = 4$$

A partir du rang 1, la suite (v_n) est périodique. On peut écrire :

$$(-4 ; -2 ; 4 ; 0 ; -2 ; 4 ; 0 ; \dots)$$

Correction 4

1. Voici synthétisé ci-dessous, le fonctionnement de l'algorithme :

Initialisation	a prend la valeur -1 .
$i = 0$	Afficher -1 . a prend la valeur $-2 \times 2 - 0 + 1 = -3$
$i = 1$	Afficher -3 . a prend la valeur $-3 \times 2 - 1 + 1 = -6$
$i = 2$	Afficher -6 . a prend la valeur $-6 \times 2 - 2 + 1 = -17$
$i = 3$	Afficher -17 . a prend la valeur $-17 \times 2 - 3 + 1 = -36$
$i = 4$	Afficher -36 . a prend la valeur $-36 \times 2 - 4 + 1 = -75$
$i = 5$	Afficher -75 . a prend la valeur $-75 \times 2 - 5 + 1 = -154$

Ainsi, les différentes valeurs affichées par l'algorithme sont :

$$-1 ; -3 ; -6 ; -17 ; -36 ; -75$$

2. En regardant le fonctionnement de l'algorithme, en définissant la suite (u_n) , on a :

$$u_0 = -1 ; u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Correction 5

1. Voici les cinq premiers termes de la suite (u_n) :

$$\bullet u_0 = 3$$

$$\bullet u_1 = 1$$

$$\bullet u_2 = 2 \cdot u_1 + u_0 = 2 \times 1 + 3 = 5$$

$$\bullet u_3 = 2 \cdot u_2 + u_1 = 2 \times 5 + 1 = 11$$

$$\bullet u_4 = 2 \cdot u_3 + u_2 = 2 \times 11 + 5 = 27$$

2. Voici les quatre premiers termes de la suite (v_n) :

$$\bullet v_0 = -3$$

$$\bullet v_1 = 0 - 2 \cdot v_0 = -2 \times (-3) = 6$$

$$\bullet v_2 = 1 - 2 \cdot v_1 = 1 - 2 \times 6 = 1 - 12 = -11$$

$$\bullet v_3 = 2 - 2 \cdot v_2 = 2 - 2 \times (-11) = 2 + 22 = 24$$

Correction 6

1. Voici le tableau complété :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	-5	-9	-11	-11	-9	-5	1	9	19	31

2. La fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = x^2 - 7x + 1$$

est un polynôme du second degré dont le coefficient du terme du second degré est positif. Ainsi, la parabole représentative de la fonction f admet un minimum dont l'abscisse a pour valeur :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2 \times 1} = \frac{7}{2}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
Variation de f			

La fonction f est croissante sur $\left[\frac{7}{2}; +\infty\right[$.

On en déduit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

Correction 7

La suite (u_n) est définie explicitement à l'aide de la fonction f dont l'image de x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*$$

L'expression de la fonction f est définie par le quotient des fonctions u et v où :

$$u(x) = x^2 - 1 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = 2x \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{2x\sqrt{x} - (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{\frac{2x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{4x^2 - x^2 + 1}{2\sqrt{x}x} \\ &= \frac{3x^2 + 1}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Le numérateur et le dénominateur de ce quotient sont positifs sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que la dérivée f' est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et ainsi la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

Correction 8

1. Voici le tableau complété :

n	0	1	2	3	4
u_n	1	-1	-3	-13	-183

2. L'étude de la différence de deux termes consécutifs donne :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - u_n^2 - 1) - u_n = -u_n^2 - 1 < 0$$

Ainsi, la différence de termes consécutifs de la suite est négatif, on en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

Correction 9

1. Tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positifs.

Pour étudier la monotonie de la suite, étudions le quotient de deux termes consécutifs de la suite (u_n) :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{4}}{\frac{3^n}{4}} = \frac{3^{n+1}}{4} \times \frac{4}{3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3 > 1$$

Le quotient étant strictement supérieur à 1 pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_n = \frac{n}{2^{n+1}} > 0$

Ainsi, tous les termes de la suite (v_n) sont positifs. Ainsi, pour étudier la monotonie de la suite (v_n) , étudions le quotient de deux termes consécutifs de cette suite :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)+1}}}{\frac{n}{2^{n+1}}} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^{n+1}}{n} \\ &= \frac{n+1}{2^{n+2}} \times \frac{2^{n+1}}{n} = \frac{n+1}{n} \times \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

Cherchons pour quelles valeurs de n , ce quotient est inférieur à 1 :

$$\frac{n+1}{2n} < 1$$

$$\frac{n+1}{2n} - 1 < 0$$

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{2n}{2n} < 0$$

$$\frac{1-n}{2n} < 0$$

Le dénominateur étant positif, on en déduit le signe du quotient pour $n \geq 2$: $\frac{1-n}{2n} < 0$.

Ainsi, la suite (v_n) est décroissante pour $n \geq 2$.

Correction 10

1. Chaque terme de cette suite est positif ; étudions le quotient de deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)+2}}{\frac{5^n}{n+2}} = \frac{5^{n+1}}{n+3} \times \frac{n+2}{5^n} = 5 \cdot \frac{n+2}{n+3} \\ &= \frac{5 \cdot (n+2)}{n+3} = \frac{5n+10}{n+3} \end{aligned}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a les deux comparaisons :

$$5n \geq n \quad ; \quad 10 \geq 3$$

On en déduit la comparaison :

$$5n+10 \geq n+3$$

Sur $n \in \mathbb{N}$, $n+3$ est strictement positif :

$$\frac{5n+10}{n+3} \geq \frac{n+3}{n+3}$$

$$\frac{5n+10}{n+3} \geq 1$$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

2. a. On a la simplification :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (n+1)^3 - 2(n+1)^2 - 3(n+1) - (n^3 - 2n^2 - 3n) \\ &= (n+1)(n^2+2n+1) - 2(n^2+2n+1) - 3(n+1) - n^3 + 2n^2 + 3n \\ &= (n^3+2n^2+n+2n+1) - 2n^2 - 4n - 2 - 3n - 3 - n^3 + 2n^2 + 3n \\ &= n^3 + 2n^2 + n + 2n + 1 - 2n^2 - 4n - 2 - 3n - 3 - n^3 + 2n^2 + 3n \\ &= 3n^2 - n - 4 \end{aligned}$$

b. Etudions le signe du polynôme du second degré obtenu à la question précédente ; calculons son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = (-1)^2 - 48 = 49$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant de ce polynôme du second degré étant positif, on en déduit les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{-(-1) - 7}{2 \times 3} & = \frac{-(-1) + 7}{2 \times 3} \\ = -1 & = \frac{4}{3} \simeq 1,3 \end{array}$$

Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme étant positif, on a le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$3x^2 - x - 4$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$

Ainsi, la différence de deux termes consécutif est positif à partir du rang 2 : (v_n) est croissante à partir du rang 2.

Correction 11

1. La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{2}{3}$. Ainsi, son terme de rang n a pour valeur :

$$u_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Ainsi, tout terme de la suite (u_n) est positif.

Etudions la différence :

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= (u_0 + u_1 + \dots + u_n + u_{n+1}) - (u_0 + u_1 + \dots + u_n) \\ &= u_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (S_n) est une suite croissante.

2. D'après la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= 5 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} \\ &= 5 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] \times 3 = 15 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

3. a. Voici le tableau complété :

n	0	1	2	10	20	24
S_n	5	8,333	10,556	14,827	14,997	14,999

b. On peut conjecturer que la suite (S_n) semble converger vers 15 lorsque le n devient très grand.