EXERCICE n° 1

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 0,25n^2 - 3n + 2$.

1. Calculer les 3 premiers termes de la suite.
2. Déterminer une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ telle que pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.
3. Dans un repère, construire la courbe représentative de la fonction f.
4. Placer sur le graphique les cinq premiers points de la représentation graphique de la suite (u_n).
5. À l'aide du graphique, **conjecturer** la monotonie de la suite.

EXERCICE n° 2

g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} + 2$.

On définit la suite (v_n) par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$.

1. Calculer v_1 et v_2.
2. Dans un repère orthonormé, représenter la courbe de g ainsi que la droite d d'équation $y = x$.
3. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite (v_n).
4. À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs de v_3 à v_{12} (arrondir à 10^{-4}).

Exercice 3 (10 pts) : Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1. Sur $]-\pi;\pi]$: $\sin 2x = \sin \dfrac{\pi}{4}$

2. Sur $]-\pi;2\pi]$: $\sin x \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. Sur $]-\pi;\pi]$: $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

EXERCICE 3 :

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel u est un réel	**Variables :**	n est un entier naturel u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n

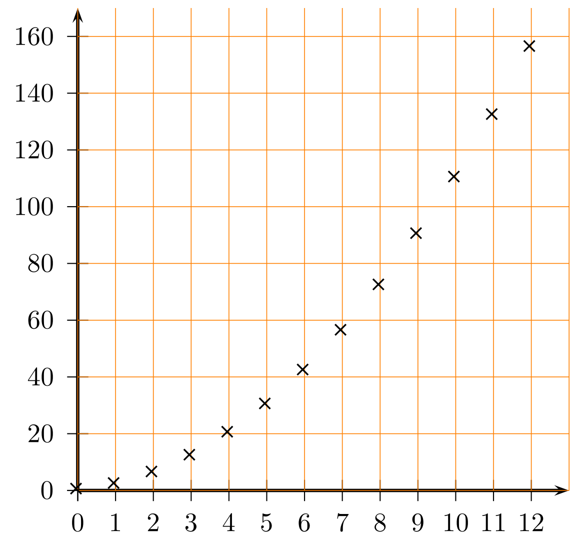
Traitement :	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n :
	  u prend la valeur $u + 2i + 2$
	Fin Pour
		Traitement :	u prend la valeur 0
			Pour i allant de 0 à $n-1$:
			  u prend la valeur $u + 2i + 2$
			Fin Pour

Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



   (a) Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
   Démontrer cette conjecture.

   (b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.
   Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies. Est-on sûr que l'expression de u_n est celle que l'on a trouvée, pour tout $n \in \mathbb{N}$?

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

   (a) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.

Bonus

   (b) On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et on rappelle que

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.

   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.