

TRIGONOMETRIE

Algorithme : mesure principale

En premier un exemple résolu

Déterminer la mesure principale d'un angle orienté de mesure $-\frac{115\pi}{4}$

Problématique : Appelons θ la mesure principale, θ et $-\frac{115\pi}{4}$ sont deux mesures du même angle,

il existe donc un entier relatif k tel que $\theta = -\frac{115\pi}{4} + 2k\pi$. Comme θ est la mesure principale, on a de plus $-\pi < \theta \leq \pi$

Il s'agit donc de trouver k entier relatif tel que $-\pi < -\frac{115\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$

Méthode : cherchons $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\pi < -\frac{115\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$

$$\begin{aligned} -\pi < -\frac{115\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi &\Leftrightarrow -\pi + \frac{115\pi}{4} < 2k\pi \leq \pi + \frac{115\pi}{4} \\ \frac{111}{4}\pi < 2k\pi &\leq \frac{119}{4}\pi \\ \frac{111}{8} < k &\leq \frac{119}{8} \\ 13 + \frac{7}{8} < k &\leq 14 + \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$k=14$ est donc l'entier recherché, ainsi la mesure principale est $\theta = -\frac{115\pi}{4} + 2 \times 14 \times \pi = -\frac{3\pi}{4}$

$$-\pi < \frac{88\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$$

$$-\frac{91}{3}\pi < 2k\pi \leq -\frac{85}{3}\pi$$

• cherchons $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$-\frac{91}{6} < k \leq -\frac{85}{6}$$

$$-15 - \frac{1}{6} < k \leq -14 - \frac{1}{6}$$

$k=-15$ convient, ainsi la mesure principale est $\theta = \frac{88\pi}{3} + 2 \times (-15)\pi = -\frac{2\pi}{3}$

Exploitions cette méthode pour créer un algorithme et le traduire en différents langages de programmation (casio, ti, algobox)

Algorithme

Une mesure (en radians) M étant donnée, on voudrait mettre au point un algorithme pour qu'une calculatrice ou un ordinateur puisse déterminer la valeur de l'entier k qui permet en calculant $M + k \times 2\pi$ de trouver la mesure principale correspondante.

Ci-dessous M_p désigne la mesure principale correspondant à M .

C'est-à-dire qu'on veut trouver k tel que $M_p = M + k \times 2\pi$

Analyse du problème : en exploitant la méthode utilisée

On cherche l'entier k tel que : $-\pi < M + k \times 2\pi \leq \pi$
 $-\pi - M < k \times 2\pi \leq \pi - M$

Ce qui est équivalent à $\frac{-\pi - M}{2\pi} < k \leq \frac{\pi - M}{2\pi}$

Il s'agit donc de trouver le plus grand entier k inférieur ou égal à $\frac{\pi - M}{2\pi}$

Si on dispose d'une instruction permettant de trouver ce plus grand entier k , on pourra rédiger l'algorithme suivant :

Entrées

Demander la mesure M

Traitement

Mettre « plus grand entier inférieur ou égal à » $\frac{\pi - M}{2\pi}$ dans k

Sorties

Afficher k

super simple non?

Appliquons!

Calculatrices Casio

Exemple de programme donnant la valeur k telle que

$$\text{Mesure principale} = \text{Mesure donnée} + k \times 2\pi$$

Une mesure M étant donnée, il permet de calculer, grâce à la valeur de k trouvée par la calculatrice, la mesure principale correspondante.

Menu Prgm

Créer un nouveau programme (F3) le nommer MESPR1

<pre>"MESURE M"?→M↵ Intg ((π-M)÷(2π))→K↵ "MP= M+ K×2π AVEC K= "↵ K↵ Stop</pre>	<p>" s'obtient avec les anciennes calculatrices par la touche SHIFT et touche ALPHA, un menu apparaît, choisir F2 ou sinon par le menu SYBL lorsqu'il est affiché.</p> <p>" avec les calculatrices usb directement par les touches SHIFT et $\times 10^x$</p> <p>? s'obtient par SHIFT VARS puis F4</p> <p>→ s'obtient directement par la Touche →</p> <p>↵ symbolise l'appui sur la touche EXE</p> <p>Intg s'obtient par Touche OPTN à côté de Shift puis Touche F6 puis Touche F4 (NUM) puis Touche F5 (Intg)</p> <p>↵ s'obtient par SHIFT VARS puis F5</p> <p>Stop s'obtient par SHIFT VARS et F2</p>
--	--

Calculatrices Ti

Exemple de programme donnant la valeur k telle que

$$\text{Mesure principale} = \text{Mesure donnée} + k \times 2\pi$$

Une mesure M étant donnée, il permet de calculer, grâce à la valeur de k trouvée par la calculatrice, la mesure principale correspondante.

Touche Prgm

Créer un nouveau programme : avec la flèche droite sélectionner en haut de l'écran : Nouv ou New

Nom du programme : MESPR1

<pre>:Disp "MESURE M" :Prompt M :partEnt((π-M)/(2π))→K :Disp "MP=M+K*2π" :Disp "AVEC K=",K :Stop</pre>	<p>partEnt s'obtient par Touche math puis sélectionner avec la flèche droite Num en haut de l'écran puis partEnt(</p> <p>Avec une version anglaise Touche math puis sélectionner avec la flèche droite Num en haut de l'écran puis choisir int</p>
--	--

Analyse du problème : en exploitant une autre méthode

Par exemple, si on ne dispose pas de l'instruction « plus grand entier k inférieur ou égal à »

Entrées

Demander la mesure M

Traitement

Si $M \in]-\pi ; \pi]$ alors il n'y a rien à faire : M est la mesure principale et on a $k=0$

Si $M \leq -\pi$ c'est que M « dépasse » M_p au moins d'un tour négatif

Ajoutons une 1^{ère} fois 2π , c'est à dire calculons $A=M+1 \times 2\pi$

Si $A > -\pi$ A est la mesure principale, il faut s'arrêter et on trouve $k=+1$

Si $A \leq -\pi$ il faut recommencer la procédure et augmenter k de 1 et ce jusqu'à ce que $A > -\pi$

Si $M > \pi$, c'est que M dépasse M_p au moins d'un tour positif.

Retirons une 1^{ère} fois 2π , c'est à dire calculons $A=M-1 \times 2\pi$,

si $A \leq \pi$, A est la mesure principale, il faut s'arrêter et on trouve $k=-1$

Si $A > \pi$, il faut recommencer la procédure et diminuer k de 1 et ce jusqu'à ce que $A \leq \pi$

Sorties

Afficher le nombre k

Remarque : trois nombres apparaissent dans cet algorithme : M, A et k on les appelle les variables

Variables

M sera donnée par l'utilisateur et ne sera pas modifiée par l'algorithme

A sera le lieu de stockage du résultat du calcul « mesure précédente $+2\pi$ (ou -2π)

k sera le lieu de stockage du nombre de fois qu'a été effectué $+2\pi$ ou -2π

Rédaction de l'algorithme

Entrées

Demander M à l'utilisateur

Traitement

Initialiser k à la valeur 0 c'est à dire mettre 0 dans k

Mettre M dans la variable A

Tant que $A > \pi$ faire

Mettre $A-2\pi$ dans A

Mettre $k-1$ dans k

Fin tant que

Tant que $A \leq -\pi$ faire

Mettre $A+2\pi$ dans A

Mettre $k+1$ dans k

Fin tant que

Sorties

Afficher k

Casio : Nom du programme : MESPR2

<pre> "MEASURE M"?→M↵ M→A↵ 0→K↵ While A≤-π↵ A+2×π→A↵ K+1→K↵ WhileEnd↵ While A>π↵ A-2×π→A↵ K-1→K↵ WhileEnd↵ "MP=M+K×2π AVEC "↵ "K="↵ K↵ Stop </pre>	<p>" s'obtient par nouvelles calculatrices ALPHA et touche $\times 10^x$, anciennes calculatrices, menu SYBL (F6) s'il est à l'écran ou SHIFT et ALPHA puis F2</p> <p>? s'obtient par SHIFT VARS puis F4</p> <p>→ s'obtient directement Touche →</p> <p>↵ symbolise l'appui sur la touche EXE</p> <p>While s'obtient par SHIFT VARS, COM (F1), ▷ (F6), ▷ (F6), While (F1)</p> <p>≤ s'obtient par SHIFT VARS, ▷ (F6), REL (F3), F5</p> <p>WhileEnd s'obtient par SHIFT VARS, COM (F1), ▷ (F6), ▷ (F6), WEnd (F2)</p> <p>> s'obtient par SHIFT VARS, ▷ (F6), REL (F3), F3</p> <p>↵ s'obtient par SHIFT VARS puis F5</p>
---	---

Le programme suivant est une variante du programme MESPR2

Expliquer

Nom du programme : MESPR3

<pre> "MES M"?→M↵ 0→K↵ If M≥0↵ Then -1→S↵ Else 1→S↵ IfEnd↵ M→A↵ While A≤-π Or A>π↵ A+2×S×π→A↵ K+S→K↵ WhileEnd↵ "MP= M+K×2π AVEC "↵ "K="↵ K↵ Stop </pre>	<p>↵ symbolise l'appui sur la touche EXE</p> <p>" s'obtient par ALPHA et touche $\times 10^x$</p> <p>? s'obtient par SHIFT VARS puis F4</p> <p>→ s'obtient directement Touche →</p> <p>If, Then, Else, IfEnd s'obtiennent par SHIFT VARS, COM (F1)</p> <p>≤ et > s'obtiennent par SHIFT VARS, ▷ (F6), REL (F3)</p> <p>While s'obtient par SHIFT VARS, COM (F1), ▷ (F6), ▷ (F6), While (F1)</p> <p>Or s'obtient par Touche OPTN puis ▷ (F6), ▷ (F6), LOGIC (F4)</p> <p>WhileEnd s'obtient par SHIFT VARS, COM (F1), ▷ (F6), ▷ (F6), WEnd (F2)</p> <p>↵ s'obtient par SHIFT VARS puis F5</p>
--	--

T.I. Nom du programme : MESPR2

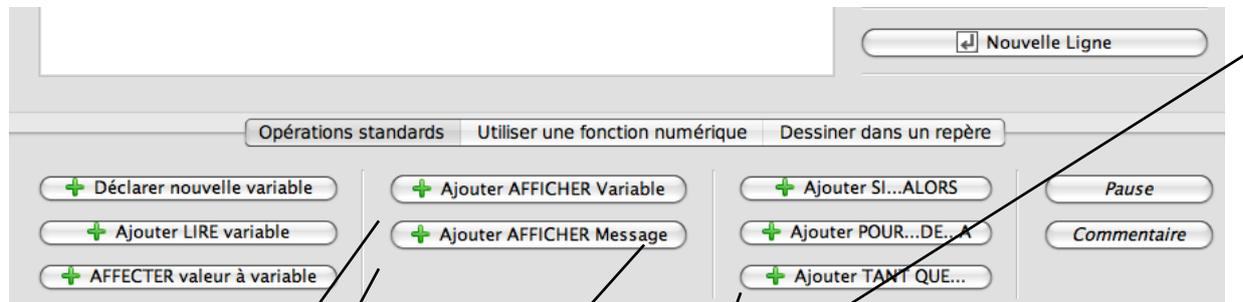
<pre> :Ø→K :Disp "MESURE M" :Prompt M :M→A :While A≤-π :A+2*π→A :K+1→K :End :While A>π :A-2*π→A :K-1→K :End :Disp "MP=M+K*2π" :Disp "AVEC K=",K :Stop </pre>	<p>Appuyer sur la touche Entrer ou Enter à la fin de chaque instruction → s'obtient directement Touche sto→ (au dessus de ON) Disp : touche prgm puis E/S ou I/O et Disp " s'obtient par Touche Alpha et touche + Prompt: touche prgm puis E/S ou I/O et Prompt While s'obtient par Touche prgm, puis CTL et ≤ s'obtient par les touches 2^{nde} et math (test) End s'obtient par touche prgm puis CTL et End > s'obtient par les touches 2^{nde} et math (test) Stop s'obtient par touche prgm puis CTL et défilement jusqu'à Stop</p>
---	---

Le programme suivant est une variante du programme MESPR2
Expliquer

<pre> :Ø→K :Disp "MESURE M" :Prompt M :If M≥Ø :Then :-1→S :Else :1→S :End :M→A :While A≤-π ou A>π :A+2*S*π→A :K+S→K :End :Disp "MP=M+K*2π" :Disp "AVEC K=",K :Stop </pre>	<p>If, Then, Else s'obtiennent par touche prgm puis CTL OU s'obtient par touches 2^{nde} Math, puis choisir LOGIQUE Si la calculatrice est en anglais, c'est OR au lieu de OU toujours grâce à 2^{nde} Math, puis choisir LOGIC</p>
--	---

Le logiciel Algobox est libre et gratuit et peut être téléchargé à l'adresse suivante : <http://www.xmlmath.net/algobox/download.html>

Pour se familiariser avec son utilisation, essayez de créer l'algorithme proposé ci-dessous.



```

1 VARIABLES
2 k EST_DU_TYPE NOMBRE
3 M EST_DU_TYPE NOMBRE
4 Mp EST_DU_TYPE NOMBRE
5 DEBUT_ALGORITHME
6 k PREND_LA_VALEUR 0
7 AFFICHER "Entrer la mesure M en radians"
8 LIRE M
9 AFFICHER M
10 Mp PREND_LA_VALEUR M
11 TANT_QUE (Mp <= Math.PI) FAIRE
12   DEBUT_TANT_QUE
13   Mp PREND_LA_VALEUR Mp+2*Math.PI
14   k PREND_LA_VALEUR k+1
15   FIN_TANT_QUE
16 TANT_QUE (Mp > Math.PI) FAIRE
17   DEBUT_TANT_QUE
18   Mp PREND_LA_VALEUR Mp-2*Math.PI
19   k PREND_LA_VALEUR k-1
20   FIN_TANT_QUE
21 AFFICHER "La mesure principale est Mp=M+k*2*Pi avec k="
22 AFFICHER k
23 FIN_ALGORITHME

```

Tester l'algorithme avec $M = \frac{3\pi}{2}$ (il faut saisir $3 * \text{Math.PI} / 2$) on trouve $k = -1$, $M = -\frac{115\pi}{4}$ on trouve $k = 14$

Pour $M = \pi$ et pour $M = -\pi$, on n'obtient pas les valeurs correctes pour k , pourtant l'algorithme est correct. A ton avis, pourquoi rencontre-t-on ce problème ? Tu peux tester l'algorithme en cochant la case Pas à Pas.

Ajouter des instructions dans le programme pour obtenir la valeur correcte de k pour $M = \pi$ et $M = -\pi$