

Corrigé du contrôle de mathématiques
Calculatrice autorisée

Exercice 1 : 3 pts

ABC est un triangle et O est un point quelconque du plan. Le point I est le milieu de $[AC]$ et P est un point du plan tel que :

$$\vec{OP} = \vec{OA} - 2\vec{OB} + \vec{OC}$$

1°) Exprimer $\vec{OA} + \vec{OC}$ en fonction de \vec{OI} .

2°) Démontrer que les droites (OP) et (IB) sont parallèles.

1°) D'abord, comme I est le milieu de $[AC]$, on peut écrire plusieurs égalités vectorielles (théorème 7). En particulier : $\vec{IA} + \vec{IC} = \vec{0}$

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}\vec{OA} + \vec{OC} &= \vec{OI} + \vec{IA} + \vec{OI} + \vec{IC} \\ &= \vec{OI} + \vec{OI} + \vec{IA} + \vec{IC} \\ &= 2\vec{OI} + \vec{0} \\ &= 2\vec{OI}\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles ;
On peut changer l'ordre des vecteurs ;
 I milieu de $[AC]$;
 $\vec{0}$ est « neutre » pour l'addition

Conclusion $\vec{OA} + \vec{OC} = 2\vec{OI}$

2°) O est un point quelconque du plan et P est un point du plan tel que :

$$\vec{OP} = \vec{OA} - 2\vec{OB} + \vec{OC}$$

Pour montrer que les droites (OP) et (IB) sont parallèles, il suffit de démontrer que les deux vecteurs \vec{OP} et \vec{IB} sont colinéaires.

Nous allons partir de l'expression de \vec{OP} et « couper » par le point I . On a :

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{OA} - 2\vec{OB} + \vec{OC} \\ &= -2\vec{OB} + \vec{OA} + \vec{OC} \\ &= -2\vec{OB} + (\vec{OA} + \vec{OC}) \\ &= 2\vec{BO} + 2\vec{OI} \\ &= 2(\vec{BO} + \vec{OI}) \\ &= 2\vec{BI} \\ &= -2\vec{IB}\end{aligned}$$

On peut changer l'ordre des vecteurs ;
On peut faire des groupements de vecteurs ;
D'après la question 1°)
Je mets 2 en facteur
D'après la relation de Chasles.
Vecteurs opposés

Par conséquent : $\vec{OP} = -2\vec{IB}$

Conclusion : Les deux vecteurs \vec{OP} et \vec{IB} sont colinéaires, donc les deux droites (OP) et (IB) sont parallèles.

CQFD.

Exercice 2 : 7 pts

ABC est un triangle. I est le milieu du segment $[AB]$. Les points J et K sont tels que :

$$\vec{JC} = \frac{1}{5} \vec{JA} \quad \text{et} \quad \vec{KB} = -5 \vec{KC}$$

- 1°) Exprimer les vecteurs \vec{AJ} et \vec{AK} en fonction de \vec{AB} et \vec{AC} .
- 2°) En déduire les coordonnées des points I, J et K dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$.
- 3°) Exprimer les vecteurs \vec{IJ} et \vec{IK} en fonction de \vec{AB} et \vec{AC}
- 4°) Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

BONUS : 2ème méthode :

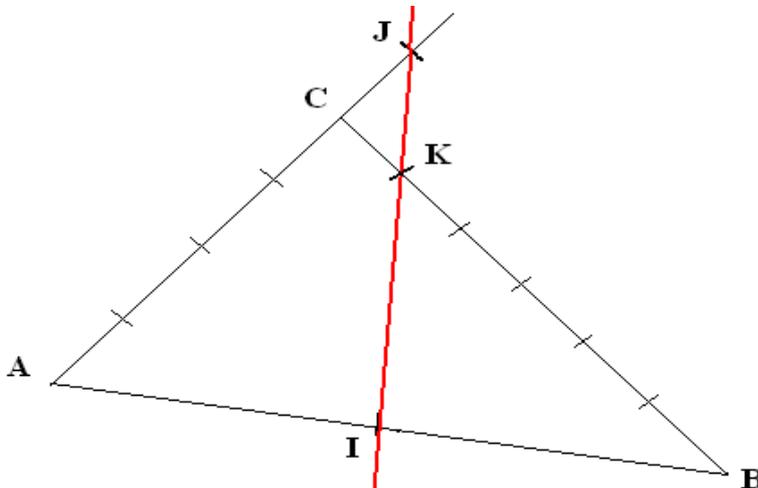
- 5°) Déterminer une équation de la droite (IJ) dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$.
- 6°) Démontrer que $K \in (IJ)$. Conclure.

1°) Exprimer les vecteurs \vec{AJ} et \vec{AK} en fonction de \vec{AB} et \vec{AC} . Je commence par me débarrasser des fractions et je raisonne par implications logiques.

$$\begin{aligned} \vec{JC} = \frac{1}{5} \vec{JA} &\Rightarrow 5 \vec{JC} = \vec{JA} && \text{Je peux placer le point J sur la figure.} \\ &\Rightarrow 5(\vec{JA} + \vec{AC}) = \vec{JA} && \text{D'après la relation de Chasles} \\ &\Rightarrow 5 \vec{JA} + 5 \vec{AC} = \vec{JA} && \text{Je distribue} \\ &\Rightarrow -5 \vec{AJ} + 5 \vec{AC} = -\vec{AJ} && \text{Vecteurs opposés} \\ &\Rightarrow -5 \vec{AJ} + \vec{AJ} = -5 \vec{AC} && \text{Je transpose} \\ &\Rightarrow -4 \vec{AJ} = -5 \vec{AC} && \text{Je simplifie} \\ &\Rightarrow \vec{AJ} = \frac{5}{4} \vec{AC} && \text{Je divise par } -4 \end{aligned}$$

De même, $\vec{KB} = -5 \vec{KC}$, donc je peux placer le point K sur la figure. D'autre part :

$$\begin{aligned} \vec{KB} = -5 \vec{KC} &\Rightarrow \vec{KA} + \vec{AB} = -5(\vec{KA} + \vec{AC}) && \text{D'après la relation de Chasles} \\ &\Rightarrow \vec{KA} + \vec{AB} = -5 \vec{KA} - 5 \vec{AC} && \text{Je distribue} \\ &\Rightarrow -\vec{AK} + \vec{AB} = 5 \vec{AK} - 5 \vec{AC} && \text{Vecteurs opposés} \\ &\Rightarrow -6 \vec{AK} = -\vec{AB} - 5 \vec{AC} && \text{Je transpose} \\ &\Rightarrow 6 \vec{AK} = \vec{AB} + 5 \vec{AC} && \text{Je simplifie} \\ &\Rightarrow \vec{AK} = \frac{1}{6} \vec{AB} + \frac{5}{6} \vec{AC} && \text{Je divise par 6.} \end{aligned}$$



2°) Comme I est le milieu de $[AB]$, on sait que : $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ donc les coordonnées de I dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$ sont : $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

De même, on sait que : $\vec{AJ} = \frac{5}{4}\vec{AC}$ donc les coordonnées de J dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$ sont : $J\left(0; \frac{5}{4}\right)$.

De même, on sait que : $\vec{AK} = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AC}$ donc les coordonnées de K dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$ sont : $K\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.

3°) Calcul des coordonnées de \vec{IJ} et \vec{IK} dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$:

1ère méthode : J'utilise les égalités vectorielles et la relation de Chasles :

$$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{5}{4}\vec{AC} \text{ donc } \vec{IJ}\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right).$$

De même :

$$\vec{IK} = \vec{IA} + \vec{AK} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AC} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AC} \text{ donc } \vec{IK}\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$$

2ème méthode : J'utilise les coordonnées des vecteurs :

$$\vec{IJ} \begin{cases} x_J - x_I = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_J - y_I = \frac{5}{4} - 0 = \frac{5}{4} \end{cases} \text{ donc } \vec{IJ}\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$$

De même :

$$\vec{IK} \begin{cases} x_K - x_I = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \\ y_K - y_I = \frac{5}{6} - 0 = \frac{5}{6} \end{cases} \text{ donc } \vec{IK}\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$$

3°) Les points I, J et K sont-ils alignés ?

Il faut vérifier si les vecteurs \vec{IJ} et \vec{IK} sont colinéaires.

1ère méthode : J'utilise les égalités vectorielles. $\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{5}{4}\vec{AC}$ et

$$\vec{AK} = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AC} \text{ On voit bien que } 4\vec{IJ} = 6\vec{IK} \text{ donc } \vec{IJ} = \frac{3}{2}\vec{IK} \text{ . Donc les}$$

vecteurs \vec{IJ} et \vec{IK} sont colinéaires.

Conclusion : Les points I, J et K sont alignés.

2ème méthode : J'utilise les coordonnées des vecteurs et la propriété analytique de colinéarité. On sait que :

$\vec{IJ}\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$ et $\vec{IK}\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$. Je calcule la différence des produits en croix :

$$xy' - x'y = -\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} - \frac{5}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{12} + \frac{5}{12} = 0$$

Par conséquent, les vecteurs \vec{IJ} et \vec{IK} sont colinéaires.

Conclusion : Les points I, J et K sont alignés.

BONUS : 2ème méthode :

5°) Déterminer une équation de la droite (IJ) dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$.

$I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ $J\left(0; \frac{5}{4}\right)$ et $K\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$

Je commence par chercher les coordonnées du vecteur directeur de la droite (IJ) :

$$\vec{IJ} \begin{cases} x_J - x_I = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_J - y_I = \frac{5}{4} - 0 = \frac{5}{4} \end{cases} \text{ donc } \vec{IJ}\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right) .$$

Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan. Je calcule les coordonnées du vecteur :

$$\vec{IM}(x - x_I; y - y_I) \text{ donc } \vec{IM}\left(x - \frac{1}{2}; y\right)$$

Je raisonne par équivalences successives.

$$\begin{aligned} M \in (IJ) &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \vec{IM} \text{ et } \vec{IJ} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) \times \frac{5}{4} - y \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (\text{On écrit } xy' - x'y = 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{4}x - \frac{5}{8} + \frac{1}{2}y = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{8} \text{ et en multipliant par 8 des deux côtés} \\ &\Leftrightarrow 10x + 4y = 5 \text{ équation générale de } (IJ). \end{aligned}$$

ou encore en multipliant par 2 des deux côtés, on obtient l'équation réduite de (IJ) :

$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{5}{4}$$

6°) Montrons que le point $K \in (IJ)$. Or $K\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$

$$-\frac{5}{2} \times x_K + \frac{5}{4} = -\frac{5}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{4} = -\frac{5}{12} + \frac{15}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = y_K . \text{ Donc } K \in (IJ) .$$

Conclusion : Les points I, J et K sont alignés.