Extremums d’une fonction

I) Définitions (rappels de seconde : voir la fiche de cours correspondante)

Soit f une fonction définie sur un ensemble D inclus dans P, m et M deux réels.

• M est le maximum de f sur D si et seulement si $f(x) \leq M$ pour tout x de D, et s’il existe un réel α dans D tel que $f(\alpha) = M$.

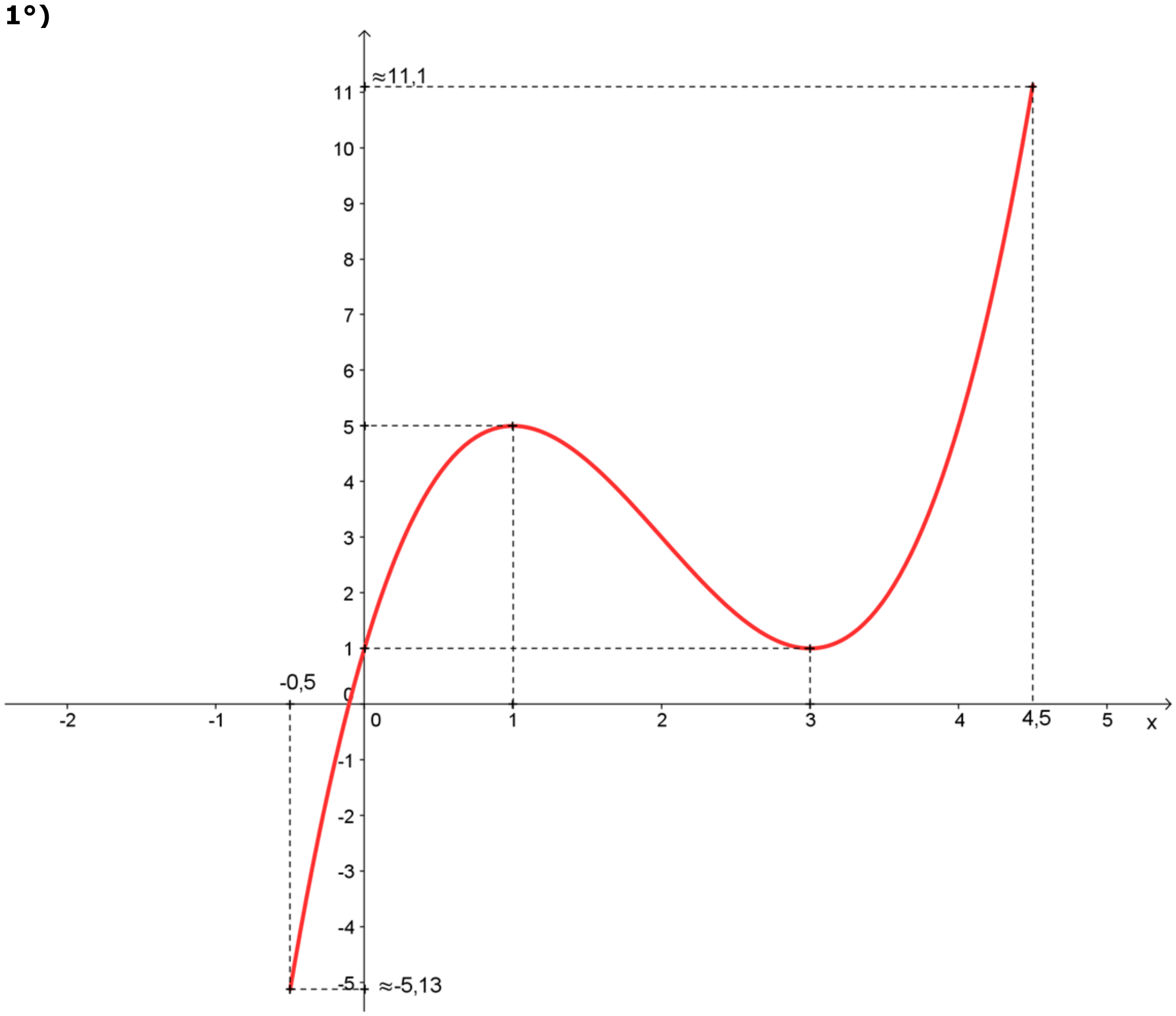
• m est le minimum de f sur D si et seulement si $f(x) \geq m$ pour tout x de D, et s’il existe un réel α dans D tel que $f(\alpha) = m$.

• On appelle extremum de f sur D son maximum ou son minimum (s’il existe).

• Si m ou M est un extremum de f sur un intervalle I ouvert inclus dans D, on dit que m ou M est un extremum local de f sur D

Exemples

1°)

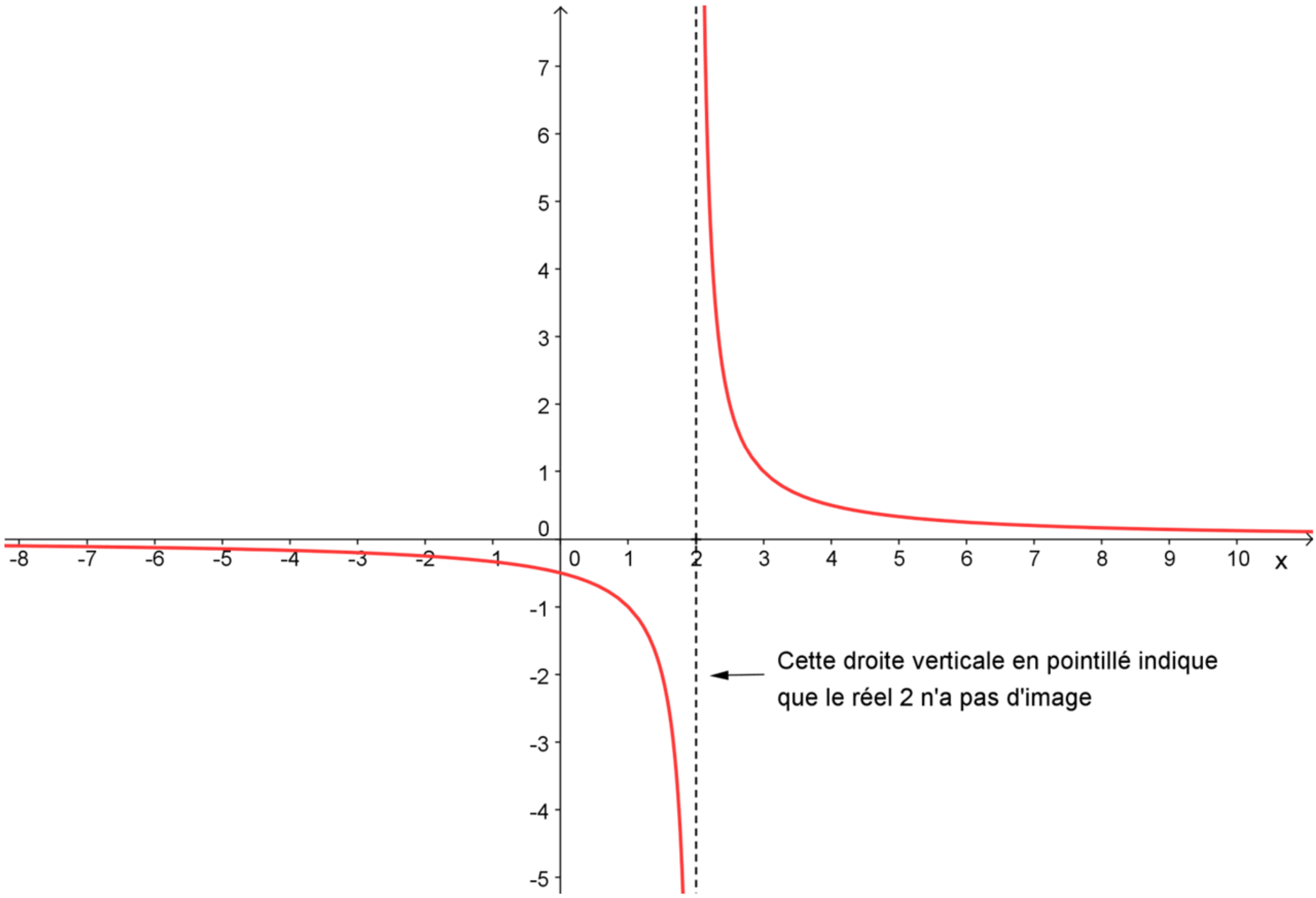


La figure ci-dessus est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle D = [-0,5 ; 4,5]

Sur D, f admet un minimum $m = f(-0{,}5) \approx -5{,}13$ et un maximum $M = f(4{,}5) \approx 11{,}1$

Sur I =] 0 ; 4 [intervalle ouvert contenu dans D, f admet un minimum local $a = f(3) = 1$ et un maximum local $A = f(1) = 5$

2°)



La figure ci-dessus est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'ensemble D =] -∞ ; 2 [∪] 2 ; + ∞ [

Sur D, f admet ni minimum, ni maximum.

II) Extremums et dérivée

Propriété :

Si une fonction f, dérivable sur un intervalle I, admet un extremum en α sur I et si α n'est pas une borne de I alors $f'(\alpha) = 0$

Démonstration :

Supposons que f admette un maximum en α, α n'étant pas une borne de I.

Il existe un intervalle ouvert J inclus dans I autour de α tel que $f(\alpha)$ soit le maximum de f sur J.
Pour h assez voisin de 0, $\alpha + h \in J$ et donc $f(\alpha + h) \leq f(\alpha)$

Alors pour $h > 0$ $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} \leq 0$ et pour $h < 0$ $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} \geq 0$

La fonction f est dérivable sur I $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ admet une limite $f'(\alpha)$ quand h tend vers 0 et les rapports $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ étant aussi bien positifs que négatifs $f'(\alpha)$ ne peut être que 0.

Démonstration analogue pour un minimum.

Attention :

La réciproque de cette propriété est fausse : de $f'(\alpha) = 0$ on ne peut pas déduire que f admet un extremum en α. (Voir exemple ci-dessous)

Exemple :

La fonction $f(x) = x^3$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$ sans que la fonction ait d'extremum en ce point.

En revanche :

si f' s'annule en changeant de signe en un réel α, α n'étant pas une borne de I, alors f admet un extremum local en α puisque f est :

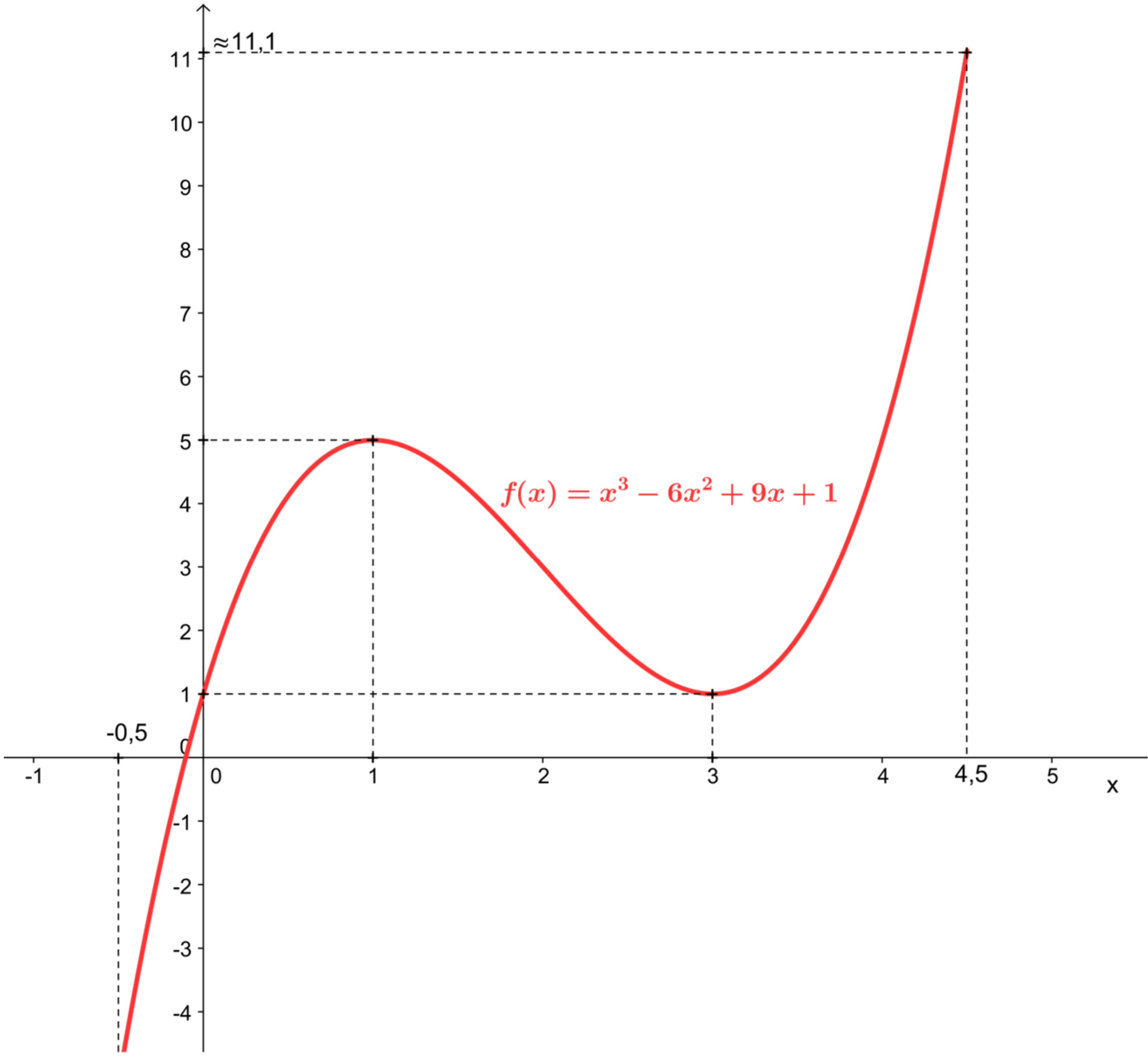
- **Soit croissante avant α et décroissante après (maximum local en α)**
- **Soit décroissante avant α et croissante après (minimum local en α)**

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur I = [- 0,5 ; 4,5] par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

f est dérivable sur I (fonction polynôme)

dont la représentation graphique est :



Graphiquement on conjecture que f admet un maximum en x = 1 et un minimum en x = 3 (ces points n'étant pas des bornes de l'intervalle de définition).

Montrons que la dérivée f' s'annule en x = 1 et en x = 3

On a $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(1)$ = 3 – 12 + 9 = 0 et $f'(3)$ = 27 – 36 + 9 = 0

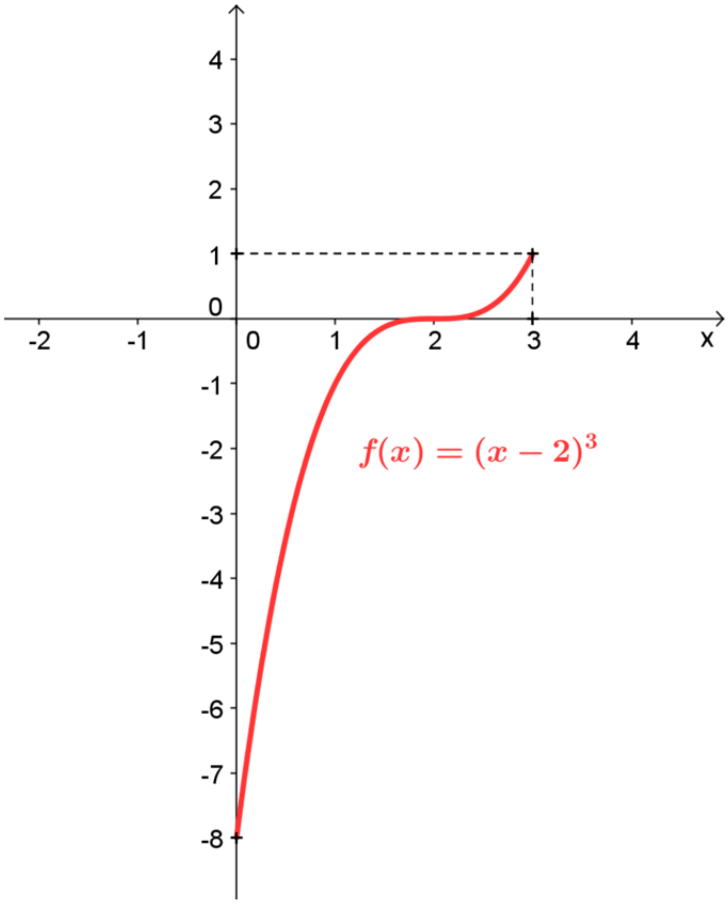
La propriété est bien vérifiée.

2) Exemple montrant la nécessité de l'hypothèse « α n'est pas une borne de l'intervalle I »

Soit la fonction f définie sur I = [0 ; 3] par $f(x)=(x-2)^3$.

f est dérivable sur I (fonction polynôme)

dont la représentation graphique est :



f admet un minimum en 0 et un maximum en 3 qui sont les bornes d' l'intervalle de définition.

On a $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ donc $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

Donc $f'(0) = 12$ et $f'(3) = 3$ ces deux valeurs ne sont pas nulles.

3) Exemple montrant que la réciproque est fausse

En reprenant l'exemple précédent on peut calculer $f'(2)$ = 3 x 4 – 12 x 2 + 12 = 0 et pourtant x = 2 n'est pas un extremum de f

4) En lisant un tableau de variation

Soit f une fonction définie et dérivable sur I = $[-4\,;\,6]$ dont on donne ci-dessous le tableau de variation.

x	-4		0		2		6
Variations de f	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

La lecture de ce tableau nous permet d'affirmer :

• Que f admet sur I un maximum en $x = -4$ et un minimum en $x = 0$

• Que sur $]-1\,;\,3[$ f admet un maximum local en $x = 2$ et un minimum en $x = 0$ et que par conséquence $f'(0) = 0$ et $f'(2) = 0$

• En outre on peut affirmer que $f('x) \geq 0$ sur [0 ; 2] et $f'(x) \leq 0$ sur $[-4\,;\,0]$ et sur [2 ; 6].

III) Etude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle I = $[-4\,;\,3]$ par $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 3x - 2$

On appelle (C) la courbe représentative de f

a) Expliquer pourquoi f est dérivable sur I

b) Calculer $'(x)$, f' désignant la dérivée de f

c) Montrer que $f'(x) = (x-1)^2(x+3)$ pour tout x de I

d) En déduire le signe de $f'(x)$ sur I et dresser le tableau de variation de f

e) La fonction f admet-elle des extremums sur I ? En quels points ?

f) La fonction f admet-elle un extremum local en $x = 1$?

g) Donner une équation des tangentes à (C) aux points d'abscisses x = -3 ; x = 0 et x = 1

h) Représenter (C) et les trois tangentes de la question précédente (On prendra comme unités graphiques 3cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

Solution :

a) f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur I inclus dans $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 4\,\frac{x^3}{4} + 3\,\frac{x^2}{3} - 5\,\frac{2x}{2} + 3 = x^3 + x^2 - 5x + 3$$

On développe $(x-1)^2(x+3) = (x^2 - 2x + 1)(x+3) = x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 6x + x + 3$

$$= x^3 + x^2 - 5x + 3 = f'(x)$$

On va donc étudier le signe de $(x-1)^2(x+3)$ sur I

x	-4		- 3		1		3
Signe de $(x-1)^2$		+	|	+	0	+	
Signe de $(x+3)$		$-$	0	+	|	+	
Signe de $f'(x)$		_	0	+	0	+	

Dressons le tableau de variations de f :

x	-4		-3		1		3
Signe de $f'(x)$		$-$	0	+	0	+	
Variations de f	$-\frac{34}{3}$	↘	$-\frac{89}{4}$	↗	$-\frac{11}{12}$	↗	$\frac{55}{4}$

e) La fonction f admet un minimum en $x = -3$ et un maximum en $x = 3$; pour le minimum comme ce n'est pas une borne de l'intervalle de définition $f'(-3) = 0$ mais pour le maximum comme c'est une borne de l'intervalle de définition : $f'(3) \neq 0$

f) Non f n'admet pas d'extremum en $x = 1$ pourtant $f'(1) = 0$ mais f' ne change pas de signe en $x = 1$

g) En $x = -3$ $f'(-3) = 0$ donc la tangente a pour équation $y = -\frac{89}{4}$ elle est horizontale

En $x = 0$ $f'(0) = 3$ et $f(0) = -2$ donc comme la tangente a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ son équation est $y = 3x - 2$

En $x = 1$ $f'(1) = 0$ donc la tangente a pour équation $y = -\frac{11}{12}$ elle est horizontale.

h) Courbes