

Sur un circuit, une voiture de sport réalise un départ-arrêt d'un kilomètre. Le nombre de mètres parcourus en fonction du temps  $x$ , exprimé en secondes, est donné sur l'intervalle  $[0; 30]$  par la fonction  $f$  telle que :

$$f(x) = \frac{x^5 - 75x^4 + 1\,500x^3}{4\,050}.$$

1. La fonction  $f$  est un polynôme de degré 5 donc elle est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et à fortiori sur  $[0; 30]$ .

Pour étudier ses variations, calculons sa dérivée puis étudions le signe de celle-ci.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5x^4 - 4 \times 75x^3 + 3 \times 1\,500x^2}{4\,050} \\ &= \frac{x^4 - 60x^3 + 900x^2}{810} \\ &= \frac{x^2}{810}(x^2 - 60x + 900) \quad (\text{et on reconnaît une identité remarquable}) \\ &= \frac{x^2}{810}(x - 30)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée  $f'$  de  $f$  est positive : la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0; 30]$ .

2. Le tableau de valeurs suivant (les images sont calculées à la dizaine près, ce qui correspond déjà à une grande précision relative) permet de tracer le graphique de  $f$  (à la fin du document) :

$x$	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$	0	40	210	500	790	960	1000

3. Établissons les variations de la fonction  $f'$  sur l'intervalle  $[0, 30]$ . Cette fonction étant un polynôme de degré 4, elle est dérivable et sa dérivée est définie par

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4 \times x^3 - 3 \times 60x^2 + 2 \times 900x}{810} \\ &= \frac{2x}{405}(x^2 - 45x + 450). \end{aligned}$$

Le premier facteur  $\frac{2x}{405}$  est positif sur l'intervalle  $[0, 30]$ ; étudions le signe du deuxième facteur en calculant le discriminant de ce trinôme :  $\Delta = 45^2 - 4 \times 450 = 225 = 15^2 > 0$  donc les deux racines sont  $\frac{45 + 15}{2} = 30$  et  $\frac{45 - 15}{2} = 15$ .

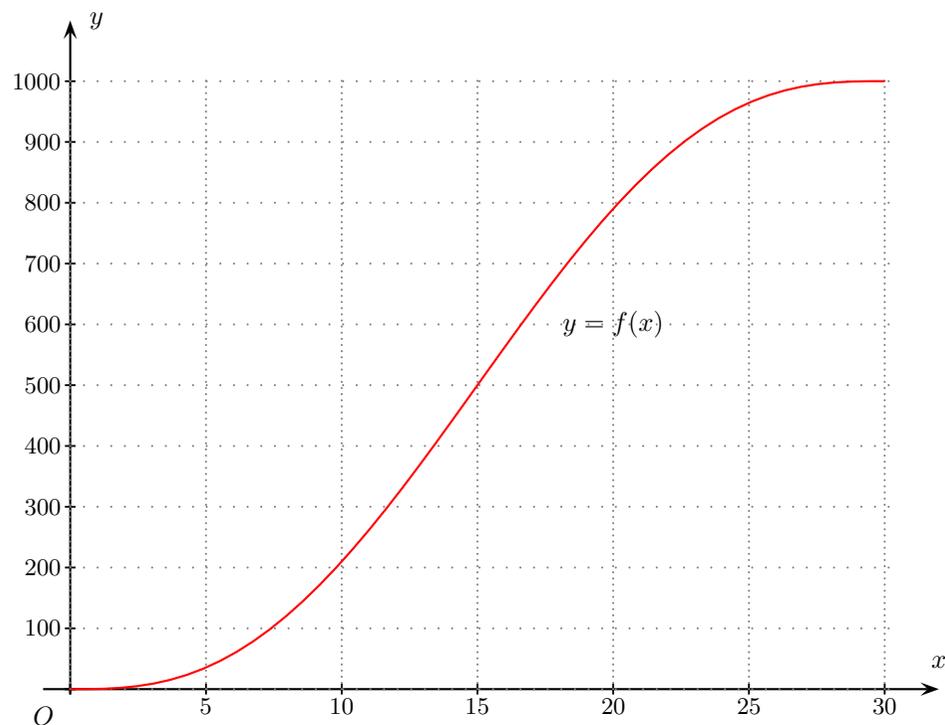
Le trinôme est du signe opposé à celui du coefficient du monôme du second degré (donc négatif ici) entre les racines et positif ailleurs,

de plus,  $f'(0) = 0$ ,  $f'(30) = 0$  et  $f'(15) = 62,5$ , d'où le tableau de variation suivant :

$x$	0	15	30		
$f''$	0	+	0	-	0
$f'$	0	62.5		0	

Ainsi, d'après le tableau de variation précédent, la vitesse maximale atteinte par cette voiture durant ce kilomètre départ-arrêt est de  $62,5 \text{ m.s}^{-1}$ .

Or  $62,5 \times 3,6 = 225$  donc la vitesse maximale vaut  $225 \text{ km.h}^{-1}$  et elle est supérieure à la vitesse limite sur une autoroute française qui vaut  $130 \text{ km.h}^{-1}$  donc il était bien nécessaire de faire ce test sur circuit.



Remarque : avant le tracer d'une courbe, un tableau de valeurs est apprécié et il est judicieux de tenir compte de quelques nombres dérivés clés pour l'orientation de quelques tangentes... ici par exemple en 0 et en 30 les tangentes sont horizontales.