Rappels sur les équations et inéquations du 1^{er} degré

Table des matières

1 Équation du premier degré **2**

2 Équation se ramenant au premier degré **2**
- 2.1 Équation rationnelle 2
- 2.2 Par une factorisation 3
  - 2.2.1 Par un facteur commun 3
  - 2.2.2 Par une identité remarquable 4
- 2.3 Par une égalité de deux carrés 4

3 Inéquation du premier degré **5**

4 Inéquation se ramenant au premier degré **5**
- 4.1 Par une factorisation 5
- 4.2 Inéquation rationnelle 6

1 Équation du premier degré

Théorème 1 : Toute équation du premier degré peut se mettre sous la forme :

$$ax = b$$

- Si $a \neq 0$ alors l'équation a une unique solution $x = \dfrac{b}{a}$
- Si $a = 0$ et $b = 0$ alors tout x est solution $S = \mathbb{R}$.
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors l'équation n'a pas de solution $S = \varnothing$

Exemple : Soit l'équation suivante : $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{3(x-2)}{4} = \dfrac{-7x+2}{12} + 2$

⚠ Pour éviter de "*traîner*" des dénominateurs, multiplions par le dénominateur commun, ici 12

$$\begin{aligned}
(\times 12) \quad 4(x+2) - 9(x-2) &= -7x + 2 + 24 \\
4x + 8 - 9x + 18 &= -7x + 2 + 24 \\
4x - 9x + 7x &= -8 - 18 + 2 + 24 \\
2x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

On conclut par l'ensemble solution : $S = \{0\}$

2 Équation se ramenant au premier degré

2.1 Équation rationnelle

Pour une équation rationnelle, on précise son ensemble de définition D_f puis on multiplie l'équation par le dénominateur commun ou éventuellement on effectue un produit en croix.

Exemples :

1) Soit l'équation suivante : $\dfrac{x-3}{2x-4} = \dfrac{x-2}{2x-5}$

- On détermine l'ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \left\{2; \dfrac{5}{2}\right\}$
- On effectue un produit en croix :

$$\begin{aligned}
x \in D_f \qquad (x-3)(2x-5) &= (x-2)(2x-4) \\
2x^2 - 5x - 6x + 15 &= 2x^2 - 4x - 4x + 8 \\
-5x - 6x + 4x + 4x &= -15 + 8 \\
-3x &= -7 \\
x &= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

or $\dfrac{7}{3} \in D_f$ donc $S = \left\{\dfrac{7}{3}\right\}$

2) Soit l'équation suivante : $\dfrac{-4}{x-4} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-3}{x-3}$

- On détermine l'ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \{0;3;4\}$
- On multiplie par le dénominateur commun ici $x(x-4)(x-3)$:

$$x \in D_f \qquad \begin{aligned} -4x(x-3) + (x-4)(x-3) &= -3x(x-4) \\ -4x^2 + 12x + x^2 - 3x - 4x + 12 &= -3x^2 + 12x \\ -4x^2 + x^2 + 3x^2 - 3x - 4x &= -12 \\ -7x &= -12 \\ x &= \frac{12}{7} \end{aligned}$$

or $\dfrac{12}{7} \in D_f$ donc $S = \left\{\dfrac{12}{7}\right\}$

2.2 Par une factorisation

Lorsqu'une équation polynomiale n'est pas du premier degré, on "*passe*" tous les termes à gauche, c'est à dire qu'on **annule le second membre**. On cherche ensuite à factoriser si cela est possible.
Il existe deux façons pour factoriser : soit par un facteur commun soit par une identité remarquable.

2.2.1 Par un facteur commun

Règle 1 : Une factorisation par un facteur commun peut se résumer par l'égalité suivante :

$$ab + ac = a(b+c)$$

Exemple : Soit l'équation suivante : $(x-1)(2x+3) = (x-1)(x-6)$

⚠ On pourrait être tenté de simplifier par $x - 1$ car il apparaît de chaque côté de l'équation. Cependant cette quantité pourrait être nulle et l'on serait dans le cas d'une division par "*zéro*" ce qui est impossible. Il faut donc annuler le second membre puis factoriser.

$$\begin{aligned} (x-1)(2x+3) &= (x-1)(x-6) \\ (x-1)(2x+3) - (x-1)(x-6) &= 0 \\ (x-1)\left[(2x+3) - (x-6)\right] &= 0 \\ (x-1)(2x+3-x+6) &= 0 \\ (x-1)(x+9) &= 0 \end{aligned}$$

un produit est nul lorsque l'un au moins des facteurs est nul

$$\begin{aligned} x - 1 = 0 \quad &\text{ou} \quad x + 9 = 0 \\ x = 1 \quad &\text{ou} \quad x = -9 \end{aligned}$$

$$S = \{-9;1\}$$

2.2.2 Par une identité remarquable

Règle 2 : Il y a trois identités remarquables du second degré qui permettent de factoriser :

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) && \text{différence de deux carrés} \\ a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)^2 && \text{carré parfait} \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a-b)^2 && \text{carré parfait} \end{aligned}$$

Exemple : Soit l'équation suivante : $(5x+2)^2 = (x+1)^2$
On annule le second le membre puis on factorise par une différence de deux carrés.

$$\begin{aligned} (5x+2)^2 &= (x+1)^2 \\ (5x+2)^2 - (x+1)^2 &= 0 \\ (5x+2-x-1)(5x+2+x+1) &= 0 \\ (4x+1)(6x+3) &= 0 \\ 3(4x+1)(2x+1) &= 0 \end{aligned}$$

un produit est nul lorsque l'un au moins des facteur est nul

$$\begin{aligned} 4x+1 &= 0 && \text{ou} && 2x+1 = 0 \\ 4x &= -1 && \text{ou} && 2x = -1 \\ x &= -\frac{1}{4} && \text{ou} && x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{4} ; -\frac{1}{2} \right\}$$

⚠ Cette équation peut aussi se résoudre par l'égalité de deux carrés. Cf ci-après.

2.3 Par une égalité de deux carrés

Règle 3 : Deux nombres au carré sont égaux si et seulement si ces nombres sont égaux ou opposés. C'est à dire que :

$$a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = b \quad \text{ou} \quad a = -b$$

Exemple : Reprenons l'exemple dernier : $(5x+2)^2 = (x+1)^2$
Égalité de deux carrés donc :

$$\begin{aligned} 5x+2 &= x+1 && \text{ou} && 5x+2 = -x-1 \\ 5x-x &= -2+1 && \text{ou} && 5x+x = -2-1 \\ 4x &= -1 && \text{ou} && 6x = -3 \\ x &= -\frac{1}{4} && \text{ou} && x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{4} ; -\frac{1}{2} \right\}$$

3 Inéquation du premier degré

Théorème 2 : Toute inéquation du premier degré peut se mettre sous l'une des formes suivantes :

$$ax \leqslant b \quad , \quad ax < b \quad , \quad ax \geqslant b \quad , \quad ax > b$$

- Si $a \neq 0$ on obtient soit une section finissante, soit une section commençante.
- Si $a = 0$ l'inéquation est soit toujours vraie, soit impossible

⚠ Lorsque l'on multiplie ou divise une inéquation par un nombre négatif, il faut inverser l'inégalité

Exemple : Résoudre l'inéquation suivante : $2(x-1) - 3(x+1) > 4(3x+2)$

$$\begin{aligned} 2(x-1) - 3(x+1) &> 4(3x+2) \\ 2x - 2 - 3x - 3 &> 12x + 8 \\ 2x - 3x - 12x &> 2 + 3 + 8 \\ -13x &> 13 \end{aligned}$$

on divise par -13, on inverse donc l'inégalité : $x < \dfrac{13}{-13} \quad \Leftrightarrow \quad x < -1$

on conclut par l'intervalle solution : $S =]-\infty\,;\,-1[$

4 Inéquation se ramenant au premier degré

Pour résoudre une inéquation qui se ramène au 1er degré par une factorisation ou par le quotient de facteurs du 1er degré, on remplit un tableau de signe afin de pouvoir conclure sur l'ensemble solution.

Règle 4 : Le signe du binôme $ax + b$, suivant les valeur de x, peut se résumer au tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		**signe de – a**	0	**signe de a**	

4.1 Par une factorisation

Exemple : Soit l'inéquation suivante : $(x-5)(x-2) < (x-5)(2x-3)$

L'inéquation n'est pas du 1er degré et le second terme de l'inéquation n'est pas nul. Il faut revenir à une forme factorisée avec un second terme nul.

- On annule le second terme. L'inéquation devient alors :

$$(x-5)(x-2)-(x-5)(2x-3)<0$$

- On factorise :

$$\begin{aligned}(x-5)\left[(x-2)-(2x-3)\right]&<0\\(x-5)(x-2-2x+3)&<0\\(x-5)(-x+1)&<0\end{aligned}$$

  On remplit alors un tableau de signes en ayant pris soin auparavant de calculer les valeurs frontières.

- Valeurs frontières :

$$\begin{array}{rlrlr} x-5=0 & \text{donc} & x=5 & & \\ -x+1=0 & \text{donc} & -x=-1 & \text{d'où} & x=1 \end{array}$$

- On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-5)(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Pour que le produit soit strictement négatif, nous avons deux possibilités

$$x<1 \quad \text{ou} \quad x>5$$

  La solution est donc : $S =]-\infty\,;\,1\,[\,\cup\,]\,5\,;\,+\infty\,[$

4.2 Inéquation rationnelle

Exemple : Soit l'inéquation suivante : $\dfrac{4}{x+1} \leqslant 3$

Après avoir déterminé l'ensemble de définition, comme le second terme n'est pas nul, il faut donc l'annuler. On réduit ensuite au même dénominateur de façon à n'avoir qu'une seule fraction.

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$
- On annule le second terme et on réduit au même dénominateur :

$$\frac{4}{x+1}-3\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4-3x-3}{x+1}\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-3x+1}{x+1}\leqslant 0$$

- On cherche les valeurs frontières :

$$\begin{array}{rlrlr} -3x+1=0 & \text{donc} & -3x=-1 & \text{d'où} & x=\dfrac{1}{3} \\ x+1=0 & \text{donc} & x=-1 & & \end{array}$$

- On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-3x+1}{x+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

- Conclusion : pour que le quotient soit négatif ou nul, on a donc :

$$x < -1 \quad \text{ou} \quad x \geqslant \frac{1}{3}$$

La solution est donc : $S = \left] -\infty\,; -1 \right[\cup \left[\dfrac{1}{3}\,;\, +\infty \right[$