▶ Dérivée d'une somme

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors $u+v$ est dérivable sur I, et on a :

$$\boxed{(u+v)' = u' + v'}$$

C'est à dire, $\forall x \in I$, $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemple 1 Quelle est la dérivée de

$$\begin{aligned} h :]2; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} + \sqrt{x} \end{aligned} \quad ?$$

$h = u + v$, définie sur $]2; +\infty[$, intervalle sur lequel $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$ sont dérivables et pour tout $x > 2$, $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
De plus, $h = u + v \Rightarrow h' = u' + v'$ donc pour tout $x > 2$,

$$\boxed{h'(x) = u'(x) + v'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.}$$

▶ Dérivée d'un produit

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors uv est dérivable sur I, et on a :

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$$

C'est à dire, $\forall x \in I$, $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Exemple 2 Quelle est la dérivée de

$$\begin{aligned} h :]2; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^3}\right) \end{aligned} \quad ?$$

$h = uv$, définie sur $]2; +\infty[$, intervalle sur lequel $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \sqrt{x} - \dfrac{1}{x^3}$ sont dérivables (en effet $v = w + t$, avec w et t dérivables sur $]2; +\infty[$: $v' = w' + t'$) et pour tout $x > 2$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\dfrac{3}{x^4}\right)$.
De plus, $h = uv \Rightarrow h' = u'v + uv'$ donc pour tout $x > 2$,

$$\boxed{h'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^3}\right) + x^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^4}\right).}$$

Conséquence très importante : Soit k un réel quelconque, u une fonction dérivable sur un intervalle I. D'après le théorème précédent, ku est dérivable sur I et $\boxed{(ku)' = ku'}$

Exemple 3 Quelle est la dérivée de

$$\begin{aligned} h :]2; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 4x^3 \end{aligned} \quad ?$$

$h = 4u$, définie sur $]2; +\infty[$, intervalle sur lequel $u : x \mapsto x^3$ est dérivable et pour tout $x > 2$, $u'(x) = 3x^2$.
De plus, $h = 4u \Rightarrow h' = 4u'$ donc pour tout $x > 2$,

$$\boxed{h'(x) = 4u'(x) = 4 \times 3x^2 = 12x^2.}$$

▶ Dérivée d'un quotient

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et v ne s'annulant pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I, et on a :

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

C'est à dire, $\forall x \in I$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$.

Exemple 4 Quelle est la dérivée de

$$h :]2;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{3x^2}{2x-4} \quad ?$$

$h = \dfrac{u}{v}$, définie sur $]2;+\infty[$, intervalle sur lequel $u : x \mapsto 3x^2$ et $v : x \mapsto 2x-4$ sont dérivables et v **ne s'annule pas**. Pour tout $x > 2$, $u'(x) = 3 \times 2x = 6x$ et $v'(x) = 2 \times 1 - 0 = 2$.

De plus, $h = \dfrac{u}{v} \Rightarrow h' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ donc pour tout $x > 2$,

$$\boxed{h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{6x \times (2x-4) - 3x^2 \times 2}{(2x-4)^2} = \frac{6x^2 - 24x}{(2x-4)^2}.}$$

Conséquence très importante : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I sur lequel elle ne s'annule pas. D'après le théorème précédent, $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}}$

Exemple 5 Quelle est la dérivée de

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x^2+x+2} \quad ?$$

$h = \dfrac{1}{u}$, définie sur $]2;+\infty[$, intervalle sur lequel $u : x \mapsto x^2+x+2$ est dérivable et ne s'annule pas ($\Delta < 0$, $u(x) > 0$, signe de a). Pour tout $x > 2$, $u'(x) = 2x+1+0 = 2x+1$.

De plus, $h = \dfrac{1}{u} \Rightarrow h' = -\dfrac{u'}{u^2}$ donc pour tout $x > 2$,

$$\boxed{h'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}.}$$

OPÉRATION	FONCTION	DÉRIVÉE
Addition	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication	uv	$u'v+uv'$
Multiplication par un scalaire	ku	ku'
Quotient	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
Inverse	$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$