Un autre exemple corrigé suite à la même discussion sur l'interet des fonctions en médecine....

Etude qualitative des fonctions

Il est possible de résoudre graphiquement des équations, des inéquations et de chercher des extrema (minimum ou maximum). On obtiendra alors des valeurs approchées. Ces résolutions graphiques permettent de faire des conjectures qui pourront être vérifiées par des calculs algébriques.

I. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Activité

Concentration d'un médicament dans le sang

Des expériences pour tester un médicament, suivies d'une modélisation mathématique, ont permis d'établir qu'après avoir injecté une dose de ce produit, la quantité de substance, en millilitre par litre de sang, à l'instant t, exprimée en heure, est égale à : $\frac{6,3t}{t^2+2}$.

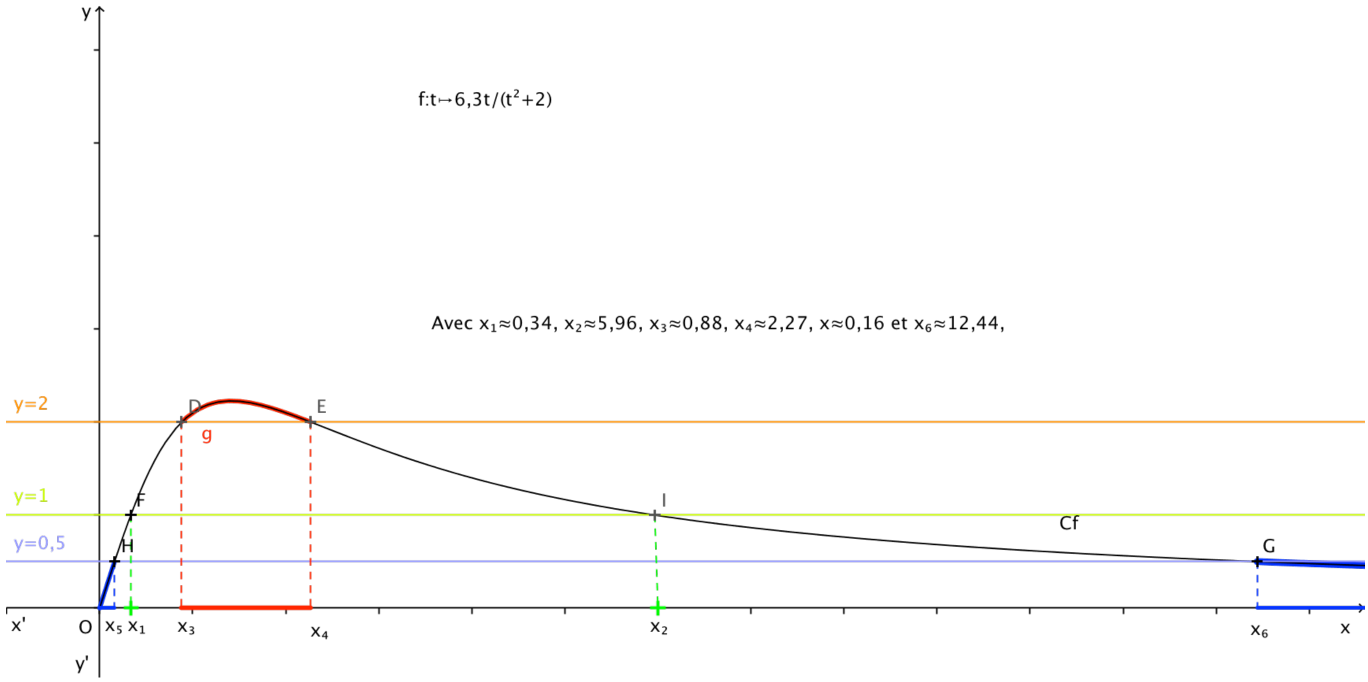
a/ Déterminer, en heure et minute, les instants où un litre de sang contient un millilitre de la substance de médicament.

b/ Déterminer, en heure et minute, les instants où un litre de sang contient plus de deux millilitres de la substance de médicament.

c/ Déterminer, en heure et minute, les instants où un litre de sang contient au plus 0,5 millilitre de la substance de médicament.

On considère la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \frac{6,3t}{t^2+2}$$



a) Résolution graphique de $f(t) = 1$

Les solutions de l'équation $f(t)=1$ sont les abscisses des points de C_f dont l'ordonnée est égale à 1 (ou encore : « résoudre l'équation $f(t)=1$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection de C_f avec la droite d'équation $y=1$ »).

Donc $S=\{x_1,x_2\}$ avec $x_1 \approx 0,34$ et $x_2 \approx 5,96$.

Or 0,34 h = $(0,34\times 60)$ min $\approx$ 20 min et 5,96 h = 5 h $(0,96\times 60)$ min $\approx$ 5 h 58 min

Au bout de 20 min et au bout de 5 h 58 min à la minute près, un litre de sang contient un millilitre de substance de médicament.

b) Résolution graphique de l'inéquation $f(t) > 2$

Les solutions de l'inéquation $f(t)>2$ sont les abscisses des points de C_f dont l'ordonnée est strictement supérieure à 2 (ou encore : « les solutions de l'inéquation $f(t)>2$ sont les abscisses des points de C_f qui sont placés au-dessus de la droite d'équation $y=2$ »).

Donc $S=]x_3,x_4[$ avec $x_3 \approx 0,88$ et $x_4 \approx 2,27$

Or 0,88 h = $0,88\times 60$ min $\approx$ 53 min et 2,27 h = 2 h $(0,27\times 60)$ min $\approx$ 5 h 16 min

Entre 53 min et 2h16min un litre de sang contient plus de deux millilitres de substance de médicament.

c) Résolution graphique de $f(t) \leq 0,5$

Les solutions de l'inéquation $f(t)\leq 0,5$ sont les abscisses des points de C_f dont l'ordonnée est inférieure à 0,5 (ou encore : « les solutions de l'inéquation $f(t)\leq 0,5$ sont les abscisses des points de C_f qui sont placés en dessous ou sur la droite d'équation $y=0,5$ »).

Donc $S=[0,x_5]\cup[x_6,+\infty[$ avec $x_5 \approx 0,16$ et $x_6 \approx 12,44$

Or 0,16 h $=(0,16\times 60)$ min $\approx$ 9 min et 12,44 h = 12 h $(0,44\times 60)$ min $\approx$ 12 h 27 min

Durant les 9 premières minutes puis à partir de 12h27 min, un litre de sang contient au plus 0,5 millilitre de substance de médicament.

d) Complément de la question a)

Si l'on veut vérifier la conjecture faite au a), il faut résoudre algébriquement l'équation : $f(t) = 1$ dans $\mathbb{R}^+$

Or, pour $t\in\mathbb{R}^+$, $f(t)=1 \Leftrightarrow \dfrac{6,3t}{t^2+2}=1 \Leftrightarrow 6,3t=t^2+2 \Leftrightarrow t^2-6,3t+2=0$

Cette équation va être résolue grâce à mise sous forme canonique :

$$t^2-6,3t+2=0 \Leftrightarrow t^2-\frac{2\times 6,3t}{2}+\left(\frac{6,3}{2}\right)^2-\left(\frac{6,3}{2}\right)^2+2=0 \Leftrightarrow \left(t-\frac{6,3}{2}\right)^2-\frac{39,69}{4}+\frac{8}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(t-\frac{6,3}{2}\right)^2-\frac{31,69}{4}=0 \Leftrightarrow \left(t-\frac{6,3}{2}-\sqrt{\frac{31,69}{4}}\right)\left(t-\frac{6,3}{2}+\sqrt{\frac{31,69}{4}}\right)=0 \Leftrightarrow \left(t-\left(\frac{6,3}{2}+\frac{\sqrt{31,69}}{2}\right)\right)\left(t-\left(\frac{6,3}{2}-\frac{\sqrt{31,69}}{2}\right)\right)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul.

Les solutions sont donc les valeurs positives $\dfrac{6,3+\sqrt{31,69}}{2}$ et $\dfrac{6,3-\sqrt{31,69}}{2}$.

Avec la calculatrice on obtient des valeurs approchées de ces solutions et on retrouve celles trouvées graphiquement.