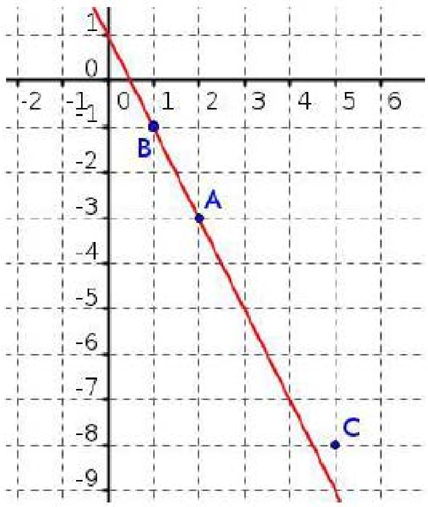
Exemple 1 : alignement de trois points

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(2;-3)$, $B(1;-1)$ et $C\,(5;-8)$

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Déterminer alors les coordonnées de D aligné avec A et B tel que $x_D = x_C = 5$.

☛ **Solution:**

Figure :



1. • Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

$$\begin{cases} x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 1 - 2 = -1 \\ y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = -1 - (-3) = 2 \end{cases}$$

donc $\vec{AB}(-1;2)$

• Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AC}$

$$\begin{cases} x_{\overrightarrow{AC}} = x_C - x_A = 5 - 2 = 3 \\ y_{\overrightarrow{AC}} = y_C - y_A = -8 - (-3) = -5 \end{cases}$$

donc $\vec{AC}(3;-5)$

• Vérification de la colinéarité

$x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} - y_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}}$
$= -1 \times (-5) - 2 \times 3$
$= 5 - 6 = -1$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. • Calcul des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$

$$\begin{cases} x_{\overrightarrow{AD}} = x_D - x_A = 5 - 2 = 3 \\ y_{\overrightarrow{AD}} = y_D - y_A = y_D - (-3) = y_D + 3 \end{cases}$$

donc $\vec{AD}(3;y_D+3)$

• Alignement de A, B et D :

A,B et D sont alignés

$\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ colinéaires

$\iff x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AD}} - y_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AD}} = 0$

$\iff -1 \times (y_D + 3) - 2 \times 3 = 0$

$\iff -y_D - 3 - 6 = 0$

$\iff y_D = -9$

donc $D(5;-9)$ est aligné avec A et B.

Remarque

On peut aussi vérifier l'alignement de A, B et C en cherchant l'équation réduite de (AB) et celle-ci existe car $x_A \neq x_B$ donc (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Equation réduite de (AB) : $y = ax + b$

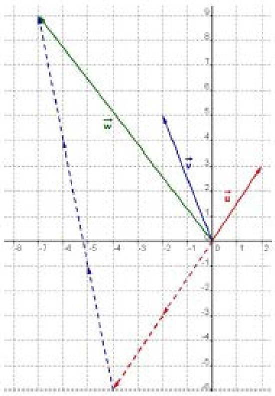
- Calcul du coefficient directeur
  $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2}{-1} = -2$
- Calcul de b
  $A \in (AB) \iff y_A = -2x_A + b \iff b = -3 + 2 \times 2 = 1$
  donc l'équation réduite de (AB) est $y = -2x + 1$ (penser à contrôler sur le graphique)
- C appartient-il à (AB) ?
  $-2x_C + 1 = -2 \times 5 + 1 = -9 \neq -8$
  donc $C \notin (AB)$
  donc A, B et C ne sont pas alignés.
- $D \in (AB)$
  $\iff y_D = -2x_D + 1$
  $\iff y_D = -2 \times 5 + 1 = -9$

Exemple 2 : Exprimer un vecteur en fonction de deux vecteurs non nuls
Dans un repère orthonormé, on donne $\overrightarrow{u}(2;3)$, $\overrightarrow{v}(-1;5)$ et $\overrightarrow{w}(-7;9)$.
Exprimer $\overrightarrow{w}$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

☛ **Solution**:

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc il existe un unique couple de réels α et β tels que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ (propriété ci-dessus).

$$\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$$
$$\iff \begin{cases} -7 = 2\alpha - \beta \\ 9 = 3\alpha + 5\beta \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \beta = 2\alpha + 7 \\ 9 = 3\alpha + 5(2\alpha + 7) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \beta = 2\alpha + 7 \\ 9 = 3\alpha + 5(2\alpha + 7) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 1\beta = 2\alpha + 7 \\ -26 = 13\alpha \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 1\beta = 3 \\ -2 = \alpha \end{cases}$$
donc $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$



Exemple 3 : Déterminer une équation cartésienne d'une droite

1. Droite définie par deux points
   Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) avec $A(2;5)$ et $B(-1;4)$
2. Droite définie par un point et un vecteur directeur
   Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par $C(-1;4)$ et parallèle à la droite (d) définie par l'équation $3x - 2y + 6 = 0$

Méthode 1 :Utilisation du critère de colinéarité

- Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (ici $\overrightarrow{AB}$)
- Utiliser le critère de colinéarité
  $M \in (AB)$
  $\iff$ A, M et B alignés
  $\iff$ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires
  $\iff x_{\overrightarrow{AM}} \times y_{\overrightarrow{AB}} - y_{\overrightarrow{AM}} \times x_{\overrightarrow{AB}} = 0$

Méthode 2 : Détermination des coefficients a et b avec les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-b;a)$

- Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (ici $\overrightarrow{AB}$)
- On a alors $a = y_{\overrightarrow{AB}}$ et $b = -y_{\overrightarrow{AB}}$ et une équation cartésienne de (AB) est $ax + by + c = 0$
- Détermination du réel c
  On utilise les coordonnées d'un point de la droite (A par exemple).
  $A \in (AB)$
  $\iff ax_A + by_A + c = 0$ (équation d'inconnue c)

☛ **Solution:**

1. Méthode 1 :

- Calcul des coordonnées d'un vecteur directeur de (AB)
  $\begin{cases} x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = -2 - 1 = -3 \\ y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 4 - 5 = -1 \end{cases}$
  donc $\overrightarrow{AB}(-3;-1)$

- Utilisation du critère de colinéarité
  $M(x;y) \in (AB)$
  $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ colinéaires
  $\iff x_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{AM}} - y_{\overrightarrow{AB}} x_{\overrightarrow{AM}} = 0$
  $\iff -3(y-5) - (-1)(x-2) = 0$
  $\iff x - 3y + 13 = 0$
  Une équation cartésienne de (AB) est $x - 3y + 13 = 0$ ou bien encore $-x + 3y - 13 = 0$

Méthode 2 :

- Calcul des coordonnées d'un vecteur directeur de (AB)
  $\overrightarrow{AB}(-3;-1)$ (fait dans la méthode 1)

- On a donc $a = -1$ et $b = 3$ donc une équation cartésienne de (AB) est de la forme $-x + 3y + c = 0$

- Calcul de c
  $A \in (AB)$
  $\iff -x_A + 3y_B + c = 0$
  $\iff -2 + 15 + c = 0$
  $\iff c = -13$
  Une équation cartésienne de (AB) est $-x + 3y - 13 = 0$ ou bien encore $-x - 3y + 13 = 0$

Remarques

- Si la droite est définie par un point et un vecteur directeur, il suffit de remplacer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le vecteur directeur donné.
- Si la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ($x_A \neq x_B$), on peut aussi retrouver une équation cartésienne à partir de l'équation réduite.
  Ici, (AB) a pour équation réduite $y = \dfrac{x+13}{3} = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{13}{3}$

2.
- Il faut déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de Δ donc de (d).
  (d) a pour équation $3x - 2y + 6 = 0$ donc $\overrightarrow{u}(2;3)$ ($a = 3$ et $b = -2$) est un vecteur directeur de (d) donc de Δ.
- Utilisation du critère de colinéarité
  $M(x;y) \in \Delta$
  $\iff \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{CM}$ colinéaires
  $\iff x_{\overrightarrow{u}} y_{\overrightarrow{CM}} - y_{\overrightarrow{u}} x_{\overrightarrow{CM}} = 0$
  $\iff 2(y-4) - 3(x+1) = 0$
  $\iff -3x + 2y - 11 = 0$
  Une équation cartésienne de Δ est $-3x + 2y - 11 = 0$ (ou bien $3x - 2y + 11 = 0$).

Remarque

Avec la méthode 2, on peut aussi écrire directement qu'une équation cartésienne de Δ est de la forme $3x - 2y + c = 0$ puisque le vecteur $\overrightarrow{u}(2;3)$ est un vecteur directeur de Δ donc $a = 3$ et $b = -2$.
Il suffit ensuite d'utiliser les coordonnées du point A pour déterminer c soit :
$C \in \Delta \iff 3x_C - 2y_C + c = 0 \iff -3 - 8 + c = 0 \iff c = 11$