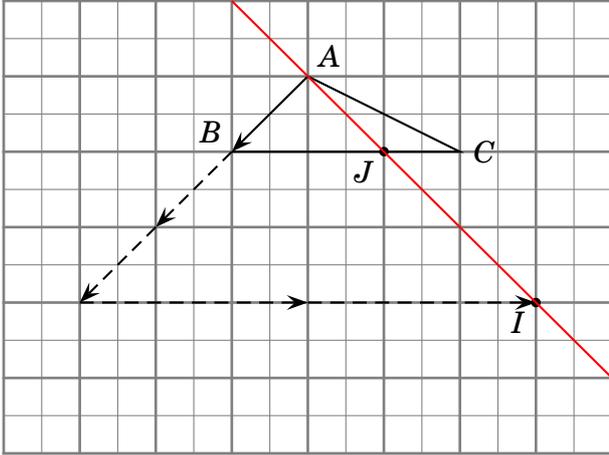


Correction : décomposer des vecteurs pour démontrer

Exercice 1

- a) ABC est un triangle. Les points I et J sont tels que : $\vec{AI} = 3\vec{AB} + 2\vec{BC}$ et $\vec{BJ} = \frac{2}{3}\vec{BC}$.



Pour montrer que les points A , I et J sont alignés, montrons que les vecteurs \vec{AI} et \vec{AJ} sont colinéaires.

* On a déjà : $\vec{AI} = 3\vec{AB} + 2\vec{BC}$ d'après l'énoncé.

* De plus : $\vec{AJ} = \vec{AB} + \vec{BJ} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC}$.

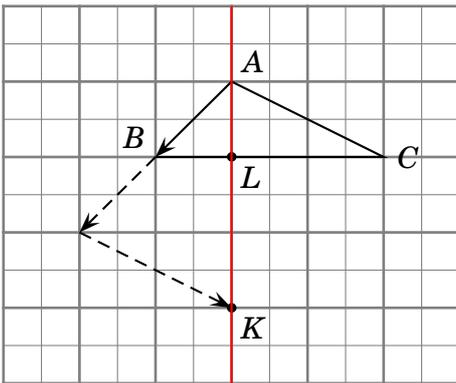
On remarque alors que : $3 \times \vec{AJ} = \vec{AI}$

soit $\vec{AI} = 3\vec{AJ}$

donc les vecteurs \vec{AI} et \vec{AJ} sont colinéaires.

Donc les points A , I et J sont alignés.

- b) ABC est un triangle. Les points K et L sont tels que : $\vec{AK} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$ et $3\vec{BL} = \vec{BC}$ soit $\vec{BL} = \frac{1}{3}\vec{BC}$.



Pour montrer que les points A , K et L sont alignés, montrons que les vecteurs \vec{AK} et \vec{AL} sont colinéaires.

* On a déjà : $\vec{AK} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$ d'après l'énoncé.

* Exprimons aussi \vec{AL} en fonction des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} :

$$\vec{AL} = \vec{AB} + \vec{BL} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{AC})$$

$$\vec{AL} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{3}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$

$$\vec{AL} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}.$$

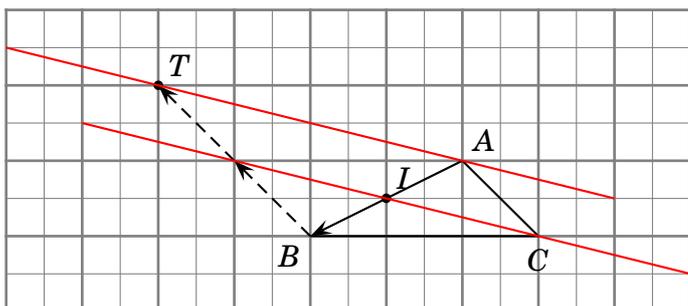
On remarque alors que : $3 \times \vec{AL} = \vec{AK}$ soit $\vec{AK} = 3\vec{AL}$ donc les vecteurs \vec{AK} et \vec{AL} sont colinéaires.

Donc les points A , K et L sont alignés.

Exercice 2

ABC est un triangle. Le point I est le milieu de $[AB]$.

Le point T est tel que : $\vec{AT} = \vec{AB} - 2\vec{AC}$ soit $\vec{AT} = \vec{AB} + 2\vec{CA}$.



Pour montrer que les droites (AT) et (CI) sont parallèles, montrons que les vecteurs \vec{AT} et \vec{CI} sont colinéaires.

* On a déjà : $\vec{AT} = \vec{AB} + 2\vec{CA}$ d'après l'énoncé.

* Comme I est le milieu de $[AB]$, on a : $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

Exprimons aussi le vecteur \vec{CI} en fonction des vecteurs \vec{AB} et \vec{CA} .

$$* \vec{CI} = \vec{CA} + \vec{AI} = \vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{CA}.$$

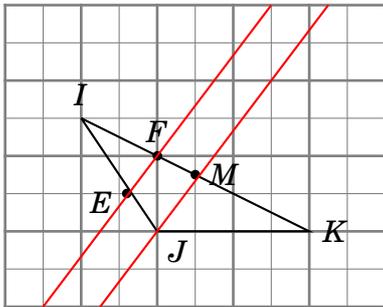
On remarque alors que : $2 \times \vec{CI} = \vec{AT}$ soit $\vec{AT} = 2\vec{CI}$ donc les vecteurs \vec{AT} et \vec{CI} sont colinéaires.

Donc les droites (AT) et (CI) sont parallèles.

Exercice 3

IJK est un triangle. Les points E et F sont tels que : $\vec{IE} = \frac{2}{3}\vec{IJ}$ et $\vec{IF} = \frac{1}{3}\vec{IK}$.

M est le milieu du segment $[IK]$.



Pour montrer que les droites (EF) et (JM) sont parallèles, montrons que les vecteurs \vec{EF} et \vec{JM} sont colinéaires.

$$* \text{ On a : } \vec{EF} = \vec{EI} + \vec{IF} = -\vec{IE} + \vec{IF} = -\frac{2}{3}\vec{IJ} + \frac{1}{3}\vec{IK} = \frac{2}{3}\vec{JI} + \frac{1}{3}\vec{IK}.$$

$$* \text{ Comme } M \text{ est le milieu de } [IK], \text{ on a : } \vec{IM} = \frac{1}{2}\vec{IK}.$$

Exprimons aussi le vecteur \vec{JM} en fonction des vecteurs \vec{JI} et \vec{IK} .

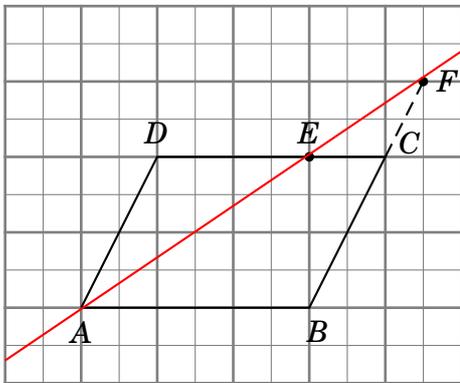
$$* \vec{JM} = \vec{JI} + \vec{IM} = \vec{JI} + \frac{1}{2}\vec{IK}.$$

On remarque alors que : $\frac{2}{3} \times \vec{JM} = \vec{EF}$ soit $\vec{EF} = \frac{2}{3}\vec{JM}$ donc les vecteurs \vec{EF} et \vec{JM} sont colinéaires.

Donc les droites (EF) et (JM) sont parallèles.

Exercice 4

$ABCD$ est un parallélogramme. Les points E et F sont tels que : $\vec{DE} = \frac{2}{3}\vec{DC}$ et $\vec{BF} = \frac{3}{2}\vec{BC}$.



Pour montrer que les points A , E et F sont alignés, montrons que les vecteurs \vec{AE} et \vec{AF} sont colinéaires.

* Tout d'abord, comme $ABCD$ est un parallélogramme, on a : $\vec{DC} = \vec{AB}$ et $\vec{BC} = \vec{AD}$.

$$* \text{ On a : } \vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{DC} = \vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AB}$$

$$\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \vec{AD}.$$

Exprimons aussi \vec{AF} en fonction des vecteurs \vec{AB} et \vec{AD} .

$$* \vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AD}.$$

On remarque alors que : $\frac{2}{3} \times \vec{AF} = \vec{AE}$ soit $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AF}$ donc les vecteurs \vec{AE} et \vec{AF} sont colinéaires.

Donc les points A, E et F sont alignés.