Devoir de Mathématiques

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse :

a) La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Si *f* est une fonction croissante sur un intervalle I et si *k* est un réel non nul, alors les fonctions $f + k$ et $k \times f$ sont croissantes sur I.

c) Si *f* est une fonction décroissante et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est croissante sur I.

d) Si *f* est une fonction croissante sur un intervalle I, alors pour tout réel *x* de I, $|f(x)| = f(x)$.

Exercice 2

a) ROC (restitution organisée des connaissances) : démontrer que la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

b) Un nombre réel *x* est situé entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$. En déduire un encadrement de $\frac{-2}{x+1}$.

Exercice 3

On considère la fonction *f* définie sur $]-\infty; 5]$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{5-x}}$.

Soient *a* et *b* deux réels de $]-\infty\,;5]$ tels que $a < b$.

Comparer $f(a)$ et $f(b)$, en justifiant toutes les étapes du raisonnement.

Qu'en déduit-on sur le sens de variation de *f* ?

Exercice 4

Soit *f* la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x+\sqrt{x}-6$.

On se propose de résoudre l'équation $f(x) = 0$ graphiquement, puis algébriquement.

a) Résolution graphique

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $\sqrt{x}=g(x)$ où *g* est une fonction affine à déterminer.

Tracer les représentations graphiques de la fonction racine carrée et de la fonction *g*.

Déterminer graphiquement la ou les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

b) Résolution algébrique

Montrer que pour tout réel *x* de $[0\,;+\infty[$, $f(x)=(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)$.

En déduire la ou les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 5

a et *b* sont deux nombres réels strictement positifs.

Démontrer que $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$.

Correction

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse :

a) La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

> FAUX : cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$+ et pas sur $\mathbb{R}$.

b) Si *f* est une fonction croissante sur un intervalle I et si *k* est un réel non nul, alors les fonctions *f* + *k* et $k \times f$ sont croissantes sur I.

> FAUX : la fonction $k \times f$ n'est pas croissante si *k* est négatif.

c) Si *f* est une fonction décroissante et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est croissante sur I.

> VRAI : la fonction inverse inverse l'ordre des nombres donc le sens de variation.

d) Si *f* est une fonction croissante sur un intervalle I, alors pour tout réel *x* de I, $|f(x)| = f(x)$.

> FAUX : *f* (*x*) peut être négatif et dans ce cas $|f(x)| = -f(x)$

Exercice 2

a) ROC (restitution organisée des connaissances) : démontrer que la fonction inverse est décroissante sur]0 ; +∞[.

> voir cahier de cours

b) Un nombre réel *x* est situé entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$. En déduire un encadrement de $\frac{-2}{x+1}$.

> $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ donc $\frac{4}{3} < x+1 < \frac{3}{2}$ car ajouter 1 ne modifie pas l'ordre,
>
> ensuite $\frac{2}{3} < \frac{1}{x+1} < \frac{3}{4}$ car prendre l'inverse inverse l'ordre,
>
> et enfin $\frac{-3}{2} < \frac{-2}{x+1} < \frac{-4}{3}$ car multiplier par -2 inverse l'ordre.

Exercice 3

On considère la fonction *f* définie sur]-∞; 5] par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x}}$.

Soient *a* et *b* deux réels de]-∞ ; 5] tels que *a* < *b*.

Comparer *f* (*a*) et *f* (*b*), en justifiant toutes les étapes du raisonnement.

> *a* < *b* donc 5 – *a* > 5 – *b* (avec 5 – *a* et 5 – *b* positifs)
>
> donc $\sqrt{5-a} > \sqrt{5-b}$ (fonction racine carrée croissante)
>
> donc $\frac{1}{\sqrt{5-a}} < \frac{1}{\sqrt{5-b}}$ (fonction inverse décroissante)
>
> et finalement *f* (*a*) < *f* (*b*).

Qu'en déduit-on sur le sens de variation de *f* ?

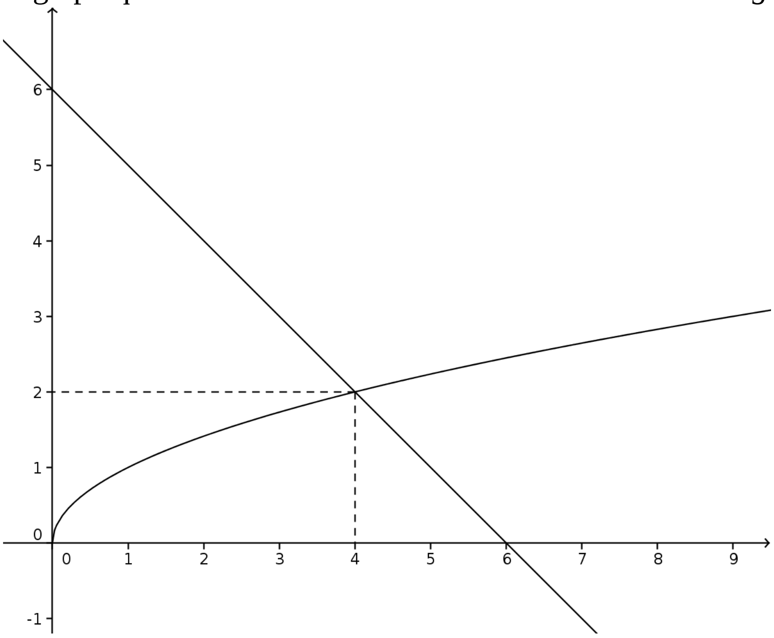
> L'ordre des nombres *a* et *b* a été conservé, donc *f* est une fonction croissante.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur [0 ; +∞[par $f(x) = x+\sqrt{x}-6$.
On se propose de résoudre l'équation $f(x) = 0$ graphiquement, puis algébriquement.
a) Résolution graphique
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $\sqrt{x}=g(x)$ où g est une fonction affine à déterminer.

> $f(x) = 0 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=-x+6$. On a donc $g(x) = -x + 6$.

Tracer les représentations graphiques de la fonction racine carrée et de la fonction g.



Déterminer graphiquement la ou les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

> Comme il n'y a qu'un seul point d'intersection, l'équation n'a qu'une solution qui est l'abscisse de ce point, soit 4.

b) Résolution algébrique
Montrer que pour tout réel x de [0 ; +∞[, $f(x)=(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)$.

> $(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)=x-2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-6=x+\sqrt{x}-6=f(x)$.

En déduire la ou les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

> $f(x) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)=0$. On a donc deux possibilités :
>
> - soit $\sqrt{x}+3=0$, ce qui n'est pas possible car $\sqrt{x}+3>3$.
>
> - soit $\sqrt{x}-2=0$, donc $\sqrt{x}=2$ et $x = 4$.
>
> L'équation $f(x) = 0$ a donc bien une solution unique qui est $x = 4$.

Exercice 5

a et b sont deux nombres réels strictement positifs.

Démontrer que $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$.

> $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}$. Comme $(a-b)^2$, a et b sont positifs, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\geqslant 0$,
>
> donc $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$