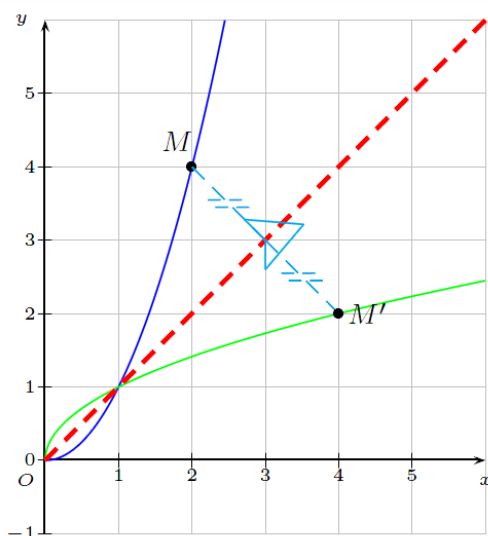
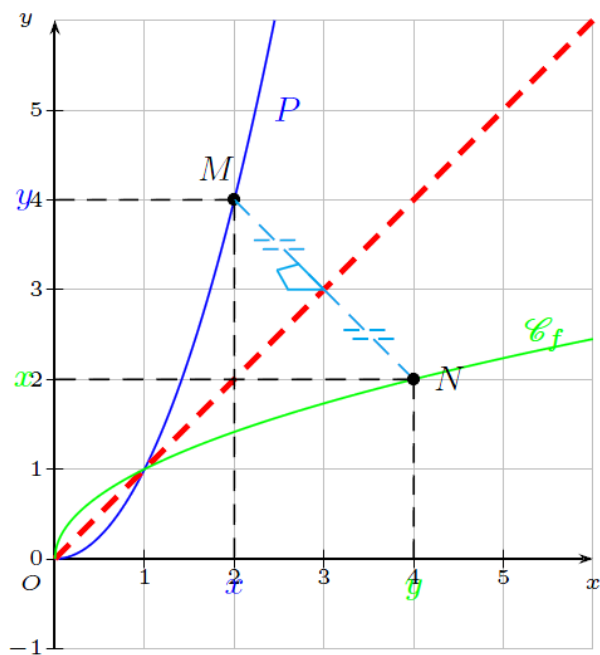


Propriété

Dans un repère orthonormé, la courbe représentant la parabole d'équation $y = x^2$ et celle de la fonction racine carrée d'équation $y = \sqrt{x}$ sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $y = x$



demo hors programme ex 100



100 1 C'est la symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.

2 Le milieu I de $[MN]$ a pour coordonnées $I\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$ dont l'ordonnée est égale à l'abscisse, ce point appartient à la droite d'équation $y = x$. De plus $OM^2 = a^2 + b^2$.

$$OI^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{2}.$$

$$IM^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{2}$$

$$OI^2 + IM^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2}{2}$$

$$= \frac{2a^2 + 2b^2}{2} = a^2 + b^2 = OM^2,$$

ce qui prouve que le triangle OIM est rectangle en I , donc la droite d'équation $y = x$ coupe le segment $[MN]$ en son milieu et perpendiculairement. M et N sont bien symétriques par rapport à cette droite.

3 On considère le point $M(x; x^2)$ avec x positif quelconque, il appartient à la courbe de la fonction carré. On en déduit que le point $N(x^2; x)$ appartient à la courbe de la fonction racine carrée. En effet, dans ce cas, $\sqrt{x^2} = x$.

Démonstration : On se place dans le cas où $x \geq 0$.

On appelle P la parabole d'équation $y = x^2$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$

- Les points $M(x; y)$ et $N(y; x)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
- $M(x; y) \in P \iff y = x^2$
- Or $y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$ car $x > 0$
- Le point $N(y; \sqrt{y}) \in \mathcal{C}_f$ c'est à dire que $N(y; x) \in \mathcal{C}_f$
- On en déduit que $M(x; y) \in P \iff N(y; x) \in \mathcal{C}_f$
- **Conclusion** Ceci est vrai quelque soit x positif, donc P et $\mathcal{C}_f$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

D'après la question 2, ces deux points sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Comme c'est vrai pour tout point de la courbe de la fonction carré, on peut dire que les deux courbes sont symétriques par rapport à cette droite.