Vecteurs du plan

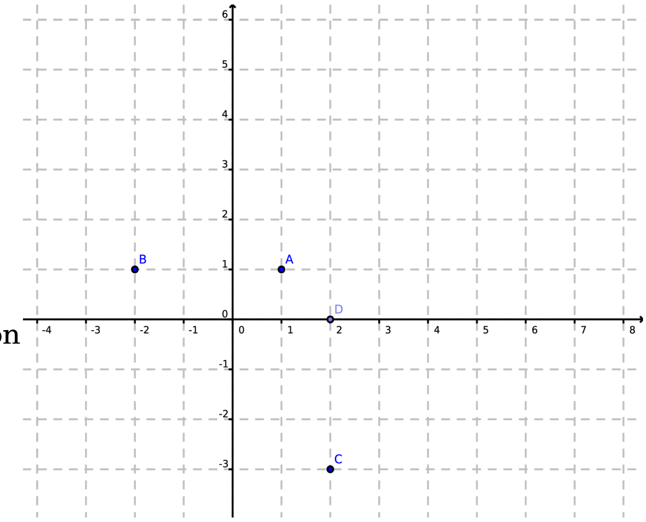
I]Introduction

On considère les points A', B', C', D', obtenus en ajoutant (2 ; 3) aux coordonnées de A, B C D respectivement. On obtient par exemple : A'(1+2 ; 1+3) donc A'(3 ; 4).

Placer les points A', B', C', D'.

On remarque qu'on passe de A à A', de B à B', etc. en « décalant » les points de la même façon. Concrètement, on réalise cela en décalquant la figure et en poussant le calque sans le faire tourner.

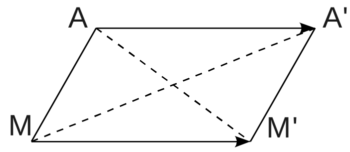
On dit qu'on passe de A à A', B à B'... en effectuant une **translation**.



II] Définitions

Définition 1 : Soit t la translation qui transforme A en A'. Pour tout point M du plan, l'image de M par la translation t est le point M' tel que [AM'] et [A'M] ont le même milieu.

Si A, A' et M ne sont pas alignés, cela revient à dire que AA'M'M est un parallélogramme.



À toute translation, on associe un objet mathématique appelé **vecteur**. Le vecteur explique comment construire l'image d'un point par une translation. On le représente par une flèche.

Définition 2 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux s'ils définissent la même translation.

La translation de l'exemple de départ transforme A en A', B en B', C en C', D en D'. On peut donc écrire : $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{DD'}$

Remarque 1 : On peut représenter un vecteur n'importe où dans le plan, puisqu'on peut appliquer la translation correspondante à n'importe quel point.

On peut caractériser un vecteur de deux façons :

- Par sa direction, son sens et sa longueur.
- Par ses coordonnées, si on dispose d'un repère.

Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{MP}$ correspondent par définition à ce qu'il faut ajouter aux coordonnées de M pour obtenir les coordonnées de P.

Définition 3 : Les coordonnées $(a ; b)$ de $\overrightarrow{MP}$ sont telles que $x_M + a = x_P$ et $y_M + b = y_P$.
Autrement dit, les coordonnées de $\overrightarrow{MP}$ sont : $(x_P - x_M ; y_P - y_M)$.

Dans notre exemple de départ, on ajoute (2 ; 3) aux coordonnées des points.

On peut donc écrire : $\overrightarrow{AA'}$ a pour coordonnées (2 ; 3) ou plus simplement : $\overrightarrow{AA'}$ (2 ; 3).

De même : $\overrightarrow{BB'}$ (2 ; 3) ; $\overrightarrow{CC'}$ (2 ; 3) ; $\overrightarrow{DD'}$ (2 ; 3).

Les coordonnées d'un vecteur correspondent intuitivement à un décalage en x et en y. Comme conséquence, on a la propriété suivante.

Remarque 2 : Si O est l'origine du repère, les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont égales à celles de M.

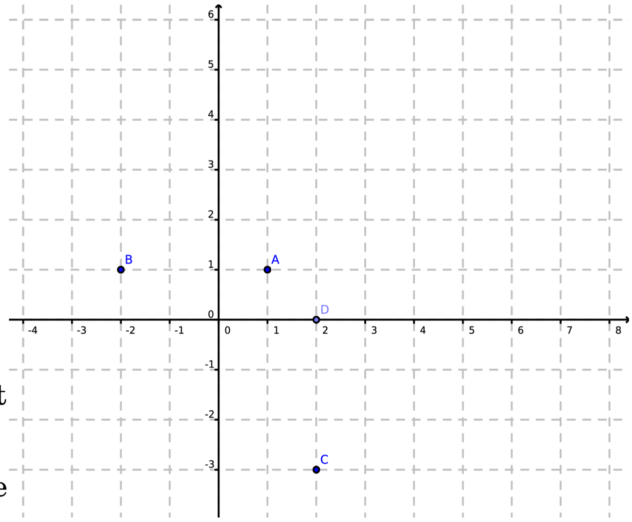
Propriété 1 : Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.

Notation : on appelle **norme** la longueur d'un vecteur. on la note $\|\vec{u}\|$

II] Somme de deux vecteurs

Définition 4 : Soient 2 vecteurs $\vec{u}\,(a\,;b)$ et $\vec{v}\,(c\,;d)$.
La somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur de coordonnées $(a+c\,;b+d)$

Exemple : soient $\vec{u}\,(2\,;3)$ et $\vec{v}\,(1\,;-4)$.



Soit A' l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Soit A'' l'image de A' par la translation de vecteur $\vec{v}$.

(On enchaîne successivement la translation de vecteur $\vec{u}$ et la translation de vecteur $\vec{v}$.)

Représenter A' et A''.

Représenter selon le même principe B' et B'', C' et C'', D' et D''.

On constate qu'on passe de A à A'', de B à B'', de C à C'', de D à D'' par une translation de vecteur $\vec{w}$, dont les coordonnées sont : $\vec{w}\,(3\,;-1)$. Autrement dit, $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$.

Conclusion : L'enchaînement de la translation de vecteur $\vec{u}$ et de la translation de vecteur $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

Conséquence :

Propriété 2 (relation de Chasles) : Quels que soient les points A, B, C du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Démonstration : on a $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$; $\overrightarrow{BC}\,(x_C - x_B\,;y_C - y_B)$ d'après la définition 3.

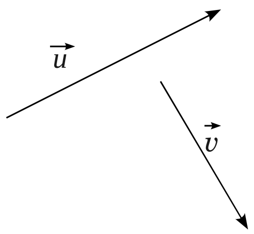
Le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ a donc pour coordonnées : $(\,x_B - x_A + x_C - x_B\,;y_B - y_A + y_C - y_B)$

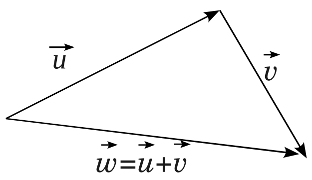
c'est à dire : $(x_C - x_A\,;y_C - y_A)$. Ce sont aussi les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$.

Comme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont les mêmes coordonnées, alors ils sont égaux d'après la propriété 1.

Application : Construction géométrique de la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

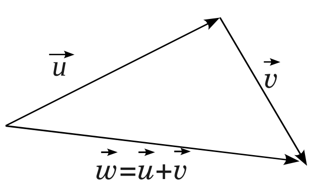
Pour construire le vecteur $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$, on représente $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en les plaçant bout à bout dans le sens des flèches. Ensuite, on trace une flèche reliant directement le point de départ au point d'arrivée.

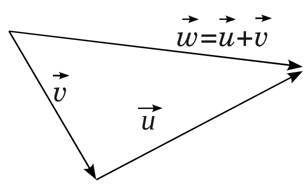


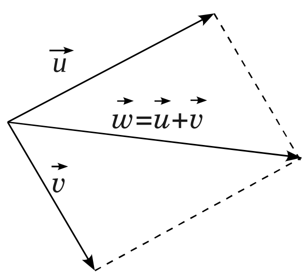


Remarque 3 : La somme de deux vecteurs est définie à partir de la somme de leurs coordonnées. Par conséquent, l'addition des vecteurs a les mêmes propriétés que l'addition des nombres.

En particulier : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.







On en déduit une autre méthode pour construire $\vec{u} + \vec{v}$: on représente $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à partir du même point et on complète la figure pour former un parallélogramme (voir dessin précédent.)

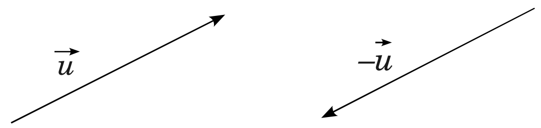
Définition 5 :	Le vecteur nul, noté $\vec{0}$ est le vecteur de coordonnées (0 ; 0).

Il n'a pas de direction. On ne peut pas vraiment le représenter.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

La translation de vecteur $\vec{0}$ transforme tout point M en M lui-même.

Définition 6 : Soit $\vec{u}$ (a ; b). Le vecteur opposé de $\vec{u}$, noté $-\vec{u}$, est le vecteur de coordonnées ($-a$; $-b$).

Intuitivement, le vecteur $-\vec{u}$ effectue les mêmes décalages que $\vec{u}$, mais en sens contraire. En gros, $\vec{u}$ c'est « l'aller » et $-\vec{u}$ c'est le « retour ». $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ ont la même direction et la même norme (longueur), mais des sens opposés.

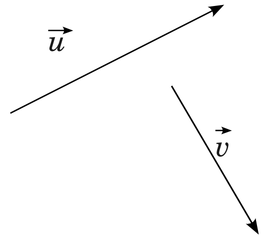


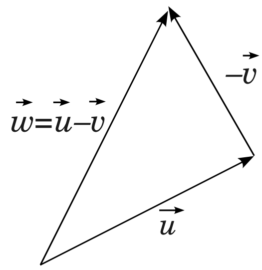
En d'autres termes : $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Propriété 3 :	Pour tous points A, B,	$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Notation : Comme pour les nombres, on pose : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Pour soustraire un vecteur, on commence par représenter son opposé, puis on ajoute.





III] Produit d'un vecteur par un nombre

Définition 7 :	Soit un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a ; b) et k un nombre quelconque.
	On note $k\vec{u}$ le vecteur de coordonnées (ka ; kb).

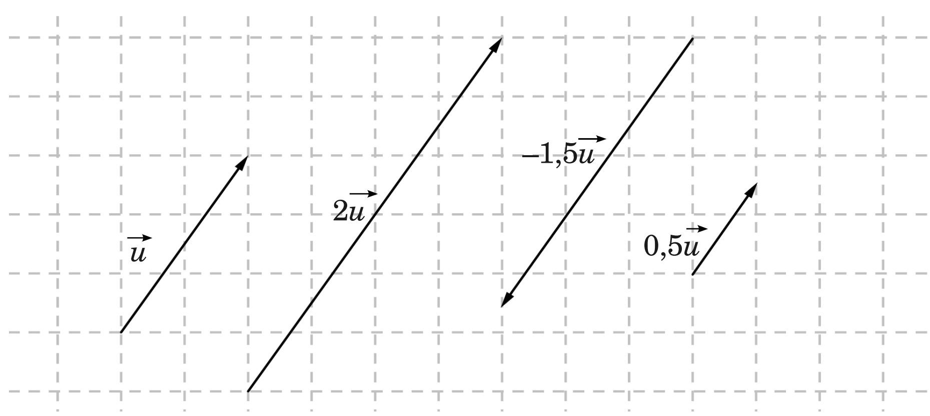
Remarque 4 :

Sauf pour k=0, $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont toujours la même direction.

Si k est positif, $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont le même sens.

Si k est négatif, $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont des sens opposés.

Si k *est* positif, la norme de $k\vec{u}$ vaut k fois la norme de $\vec{u}$. Autrement dit, $k\vec{u}$ est k fois plus grand que $\vec{u}$.



Propriété 4 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, k et l deux nombres.

$$k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v} \quad ; \quad (k+l)\vec{u}=k\vec{u}+l\vec{u} \quad ; \quad k\vec{0}=\vec{0} \quad ; \quad 0\vec{u}=\vec{0} \quad ; \quad k(-\vec{u})=-k\vec{u}$$

Ces identités se démontrent en passant aux coordonnées. Ainsi, à une propriété concernant les nombres correspond souvent une propriété concernant les vecteurs.

IV] Vecteurs colinéaires

Définition 8 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

D'autre part, $\vec{0}$ est colinéaire à tous les autres vecteurs.

Interprétation graphique :

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires s'ils ont la même direction (voir schéma précédent.)

En conséquence, on a la propriété suivante (admise).

Propriété 5 :

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Les points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

En pratique, comment savoir si deux vecteurs sont colinéaires ?

Vu la définition, deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Exemple : $\vec{u}$ (2 ; 3) et $\vec{v}$ (–1,5 ; –2,25) sont ils colinéaires ?

Disposons les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un tableau et cherchons si c'est un tableau de proportionnalité :

$\vec{u}$	$\vec{v}$
2	–1,5
3	–2,25

On peut effectuer les produits en croix : 2 × (–2,25) = –4,5 ; 3 × (–1,5) = –4,5.

Le tableau est bien un tableau de proportionnalité, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.