3. Fonctions Numériques

0. Rappels de seconde

0.1 Sens de variation d'une fonction

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Dire que f est croissante sur I (respectivement strictement croissante sur I) signifie que pour tous réels a et b de I :
si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (respectivement si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$).

- Dire que f est décroissante sur I (respectivement strictement décroissante sur I) signifie que pour tous réels a et b de I :
si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$ (respectivement si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$).

- Dire que f est constante sur I signifie que pour tous réels a et b de I : $f(a) = f(b)$.

- Dire que f est monotone sur I signifie que f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I

Introduction

En classe de seconde, deux fonctions de référence[a] ont été étudiées : la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ et la fonction inverse définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Ces fonctions, auxquelles vont s'ajouter celles de ce chapitre, permettent d'étudier des fonctions plus complexes que sont les "combinaisons" de fonctions de référence.

a. On parle de fonctions de référence car leurs définitions, leurs tableaux de variations et l'allure de leurs représentations graphiques sont à connaître parfaitement !

0.2 Fonction carré

Définition :

La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Propriété : La fonction carré est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

A Maîtriser le vocabulaire de base relatif aux fonctions

Vrai ou faux ? Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

On considère les fonctions $f : x \mapsto 3x - 1$, $g : x \mapsto -x^2 + x + 3$ et $h : x \mapsto \dfrac{-2x+5}{3x-4}$.

1 L'image de 1 par la fonction h est -5.

2 Le réel 3 a deux antécédents par la fonction g.

3 La courbe représentative de la fonction g passe par le point de coordonnées $(3\,;0)$.

4 « 1 est un antécédent de 2 par f » est équivalent à « 1 est solution de l'équation $f(x) = 2$ ».

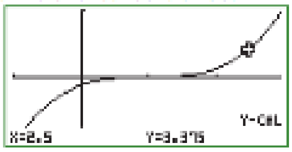
5 Le réel -1 est solution de l'équation $f(x) = 0$.

6 L'ensemble de définition de la fonction h est $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

B Revoir la notion de variations d'une fonction

QCM Pour chacune des affirmations suivantes, préciser **la (ou les)** bonne(s) réponse(s).

a et b désignent deux réels et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1 Si $a < b$ et $f(a) < f(b)$, alors :	**a.** f est croissante sur $[a\,;b]$	**b.** f est décroissante sur $[a\,;b]$	**c.** On ne peut pas en déduire les variations de f sur $[a\,;b]$
2 Si $a < b$ et $f(a) > f(b)$ alors :	**a.** f peut être croissante sur $[a\,;b]$	**b.** f peut être décroissante sur $[a\,;b]$	**c.** On ne peut pas en déduire les variations de f sur $[a\,;b]$
3 On a affiché la représentation graphique d'une fonction f sur l'écran de la calculatrice.  On peut conjecturer que :	**a.** f est croissante sur $\mathbb{R}$	**b.** f est constante sur l'intervalle $[0{,}5\,;1{,}5]$	**c.** f est croissante sur l'intervalle $[2\,;3]$
4 On sait que, pour tout réel x, $f(x) \leqslant f(2)$; alors :	**a.** f admet un maximum en 2	**b.** f est croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$	**c.** f peut être décroissante sur l'intervalle $[1\,;3]$

C Reconnaître les fonctions de référence déjà connues

Vrai ou faux ? Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

On considère les fonctions f, g et h de l'exercice **A**.

1 La fonction f est linéaire.

2 La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3 Pour tous réels a et b avec $a \neq b$, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 3$.

4 La fonction g est décroissante, puis croissante.

5 La fonction h est une fonction homographique.

Voir corrigés p. 367

Voir fiche distribuée 1s fonction de référence rappels .pdf

1 Fonctions de référence déjà connues

a Les fonctions affines

Définitions Une **fonction affine** f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b,$$

où a et b sont deux réels fixés.

REMARQUES

- Si $b = 0$, l'expression de f est $f(x) = ax$ et f est une fonction linéaire.
- Si $a = 0$, l'expression de f est $f(x) = b$ et f est une fonction constante.

Propriétés On considère la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ax + b$, où a et b sont des réels donnés.

- **Si a est positif**, la fonction affine **f est croissante** sur $\mathbb{R}$.
- **Si a est négatif**, la fonction affine **f est décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- La courbe représentative de f dans un repère du plan est une **droite**.

Si $a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax + b$	↗	

Si $a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax + b$	↘	

b La fonction carré

Définition La **fonction carré** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

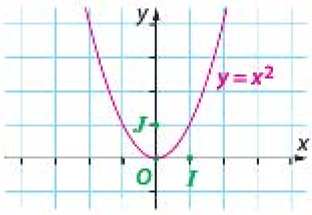
$$f(x) = x^2.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

Propriétés

- La fonction carré est **décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$**.
- La courbe représentative de la fonction carré s'appelle une **parabole**.

Dans un repère orthogonal du plan, elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



c La fonction inverse

Définition La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par :

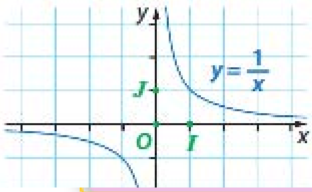
$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

Propriétés

- La fonction inverse est **décroissante sur** chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.
- La courbe représentative de la fonction inverse s'appelle une **hyperbole**.

Dans un repère du plan elle est symétrique par rapport à l'origine.



Exercices d'application

1 Donner le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto 2x - 3$; **b.** $g : x \mapsto 3 - 2x$;

c. $h : x \mapsto x^2 - 10$; **d.** $k : x \mapsto \frac{1}{x} + 6$.

2 Comparer a^2 et b^2 sans utiliser la calculatrice :

a. $a = 1{,}414$ et $b = 1{,}4104$;

b. $a = -3$ et $b = -3{,}1$;

c. $a = -0{,}1$ et $b = \frac{1}{10}$;

d. $a = \sqrt{3}$ et $b = 1{,}7$.

3 Établir les tableaux de signes des fonctions f et g de l'exercice **1.**

4 Comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sans utiliser la calculatrice :

a. $a = 25$ et $b = 26$; **b.** $a = -\frac{2}{3}$ et $b = -0{,}66$;

c. $a = -2$ et $b = 3$; **d.** $a = \pi$ et $b = 3{,}14$.

5 **a.** Étudier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions : $x \mapsto -\frac{1}{4}x^2$ et $x \mapsto \frac{2}{x}$ en étudiant le signe de la différence $\frac{2}{x} + \frac{1}{4}x^2$.

Coup de pouce $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

b. Retrouver ces résultats en utilisant la méthode exposée dans l'exercice corrigé ci-dessus.

Voir exercices 27 à 36

1. fonctions de reférence racine carré

1.1. fonction racine carré

Définition : La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ (c'est à dire $[0;+\infty[$) par $f(x)=\sqrt{x}$.

Propriété : La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

on obtient ainsi le tableau de variation suivant

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

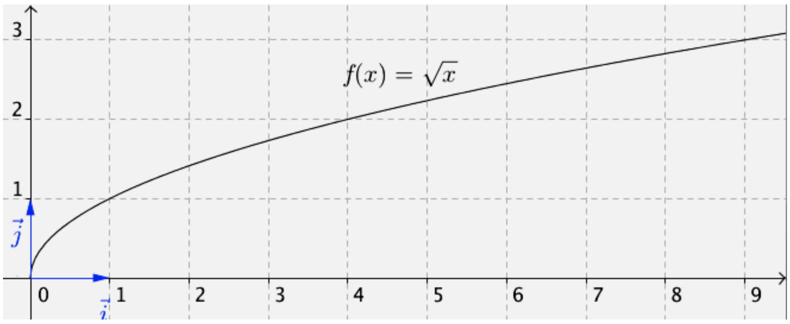
Démonstration ■:

Soit a et b deux nombres réels positifs tels que $a<b$.

$$f(a)-f(b)=\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}<0$$

Donc $f(a)<f(b)$ .ainsi f est croissante.

Représentation graphique :



x	0	1	4	9
$f(x)$	0	1	2	3

Exercices d'application

6 Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des nombres réels x pour lesquels l'expression est définie :

a. $\sqrt{2x+5}$; **b.** $\sqrt{0{,}5x-7}$;

c. $\sqrt{-3x+1}$; **d.** $\sqrt{-1{,}5x-9}$.

7 **a.** Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

Montrer que f admet pour minimum 0, et préciser en quelle valeur ce minimun est atteint.

b. Quel est le maximum de la fonction g définie sur $[-1;1]$ par : $g(x)=\sqrt{1-x^2}$?

8 Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des nombres réels x pour lesquels l'expression est définie :

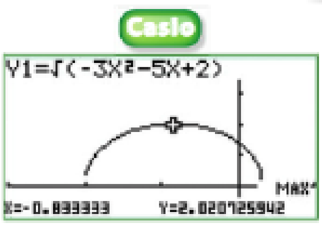
a. $f: x \mapsto \sqrt{x^2+x+5}$; **b.** $f: x \mapsto \sqrt{-3x^2-5x+2}$.

9 L'écran de calculatrice suivant amène à conjecturer que la fonction f :

$x \mapsto \sqrt{-3x^2-5x+2}$

admet un maximum en $-0{,}83$.

Démontrer cette conjecture.



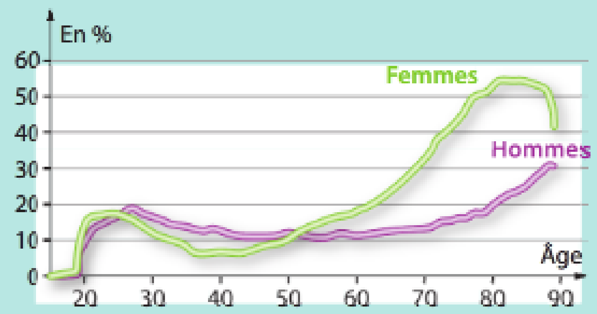
Voir exercices 40 à 43

Activité 2 Étudier des positions relatives de courbes

Les positions relatives de deux courbes peuvent illustrer de nombreuses études sociologiques.
Soit P_F la proportion des femmes vivant seules à un âge donné et P_H la proportion d'hommes vivant seuls à un âge donné.

1 **a.** Pour un âge donné, supérieur à 60 ans, quel est le signe de la différence $P_F - P_H$?
b. Pour un âge compris entre 30 et 50 ans, quel est le signe de la différence $P_F - P_H$?
c. Comment s'obtiennent ces deux résultats à partir des courbes ci-dessous ?

Proportion de personnes vivant seules



Source : Recensement de la population de 1999, INSEE.

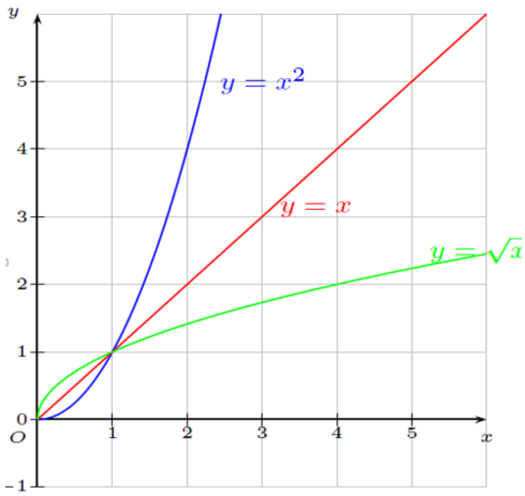
2 **À l'aide de la calculatrice,** conjecturer les positions relatives des courbes représentatives des fonctions : $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Voir les fiches **calculatrices**, page 394.

3 **a.** Factoriser $x^2 - x$; en déduire le signe de $x^2 - x$ sur chacun des intervalles $[0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.
b. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse : « le carré d'un nombre positif est toujours supérieur à ce nombre » ?

4 **a.** Vérifier que, pour tout réel strictement positif x, $x - \sqrt{x} = \dfrac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}}$.
b. En déduire le signe de $x - \sqrt{x}$ sur chacun des intervalles $]0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.

5 Démontrer les conjectures émises à la question **2** en utilisant les résultats des questions **3** et **4**.

1.2. Positions relatives des courbes des fonctions $f(x) = x, g(x) = x^2, h(x) = \sqrt{x}$.



Propriété :

- Si $0 \le x \le 1$, alors $x^2 \le x \le \sqrt{x}$
- Si $x \ge 1$, alors $\sqrt{x} \le x \le x^2$.

Démonstration ■:

Si $0 \le x \le 1$ puisque x est positif on obtient en multipiant par x :
$0 \le x^2 \le x$ (1)

de plus la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ ainsi

$0 \le \sqrt{x^2} \le \sqrt{x} \Leftrightarrow 0 \le x \le \sqrt{x}$ car x est positif (2)

ainsi en combinant ces deux résultats on obtient $0 \le x^2 \le x \le \sqrt{x}$.

CQFD

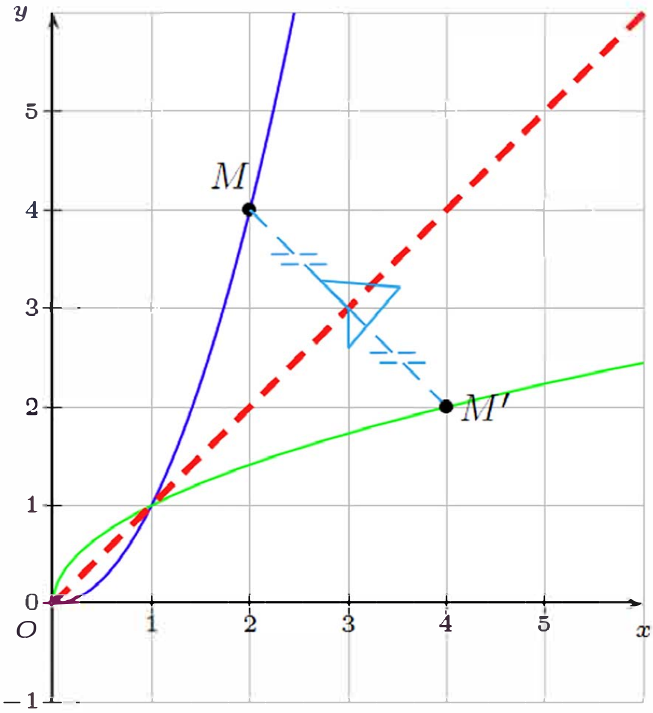
en appliquant le meme raisonnement à partir de $1 \le x$ on obtient $x \le x^2$ (1)

puis $\sqrt{x} \le \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x} \le x$ car x est positif (2)

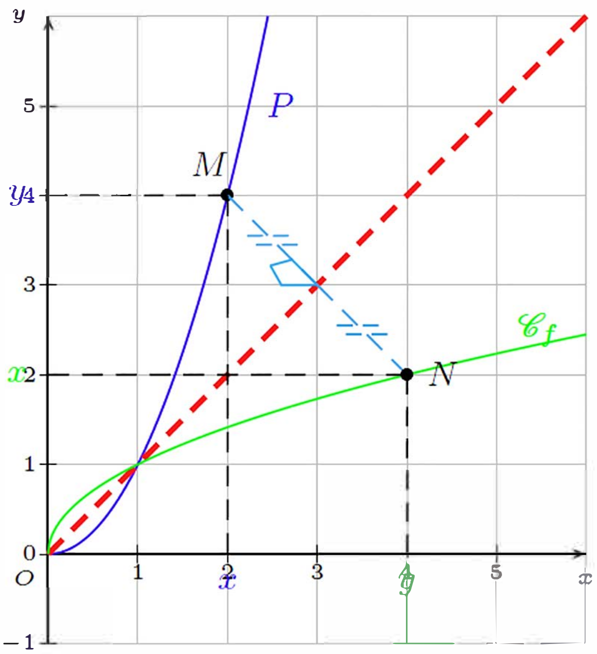
ainsi $\sqrt{x} \le x \le x^2$. CQFD

Propriété

Dans un repère orthonormé, la courbe représentant la parabole d'équation $y = x^2$ et celle de la fonction racine carrée d'équation $y = \sqrt{x}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



hors programme



Demonstration : On se place dans le cas où $x \geqslant 0$.
On appelle P la parabole d'équation $y = x^2$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$

- Les points $M(x; y)$ et $N(y; x)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
- $M(x; y) \in P \iff y = x^2$
- Or $y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$ car $x > 0$
- Le point $N(y; \sqrt{y}) \in \mathscr{C}_f$ c'est à dire que $N(y; x) \in \mathscr{C}_f$
- On en déduit que $M(x; y) \in P \iff N(y; x) \in \mathscr{C}_f$
- Conclusion Ceci est vrai quelque soit x positif, donc P et $\mathscr{C}_f$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

1.3. valeur absolue

Définition :
La valeur absolue d'un nombre A est égal
- au nombre A si A est positif,
- au nombre –A si A est négatif.

La valeur absolue de A se note $\left|A\right|$.

Exemples :
- La valeur absolue de -5 est égale à 5.
- La valeur absolue de 8 est égale à 8.

Remarque :
Soit x un nombre réel.
1) $|x| \geq 0$ 2) $|-x| = |x|$

Propriété :
La fonction valeur absolue $f(x) = |x|$.est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;0\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$.

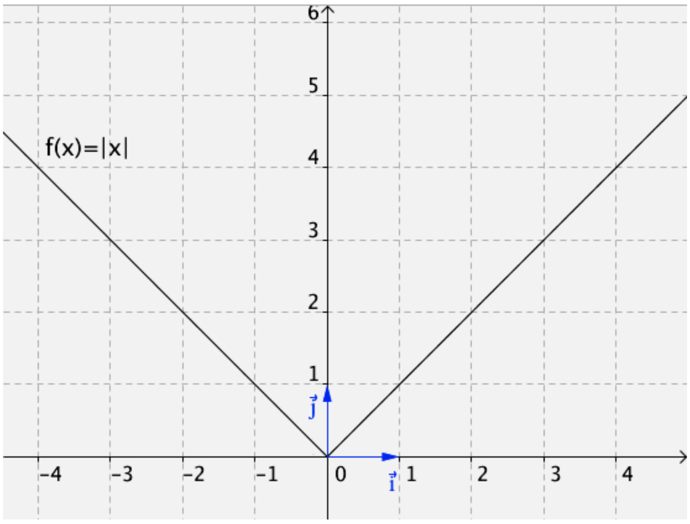
démonstration :

$$f(x) = \begin{cases} -x & sur \left]-\infty;0\right] \\ x & sur \left[0;+\infty\right[\end{cases}$$

Sur chacun des intervalles $\left]-\infty;0\right]$ et $\left[0;+\infty\right[$, la fonction f est une fonction affine.

Représentation graphique :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \lvert x\rvert$	$\searrow$	0	$\nearrow$



Remarque :
Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On dit quelle est "paire"

1.4 Exemples

Exemples * :

Connaître les variations des fonctions racine carrée et valeur absolue et leur représentation graphique.

1. Classer dans l'ordre croissant les nombres suivants sans calculer les racines carrées :

$a=\sqrt{1.012};b=\sqrt{1.02};c=\sqrt{1+10^{-2}};d=\sqrt{1+0.11^2}$

$c=\sqrt{1+10^{-2}}=\sqrt{1+0.01}=\sqrt{1.01}$

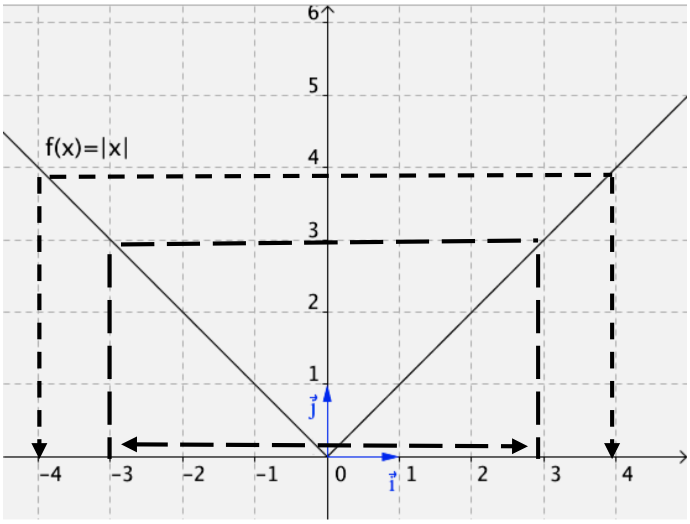
$d=\sqrt{1+0.11^2}=\sqrt{1+0.0121}=\sqrt{1.0121}$

x	0	1.01	1.012	1.0121	1.02	$+\infty$
$f(x)$	↗					

ainsi c<a<d<b

2. a. Résoudre graphiquement l'équation $|x-2|=4$

b. Résoudre graphiquement inéquation $|-5-x|<3$



a. ainsi x-2 = -4 ou x-2 = 4
d'ou x = -2 ou x = 6
S = {-2 ; 6}

b. on obtient -3 < - 5 - x < 3
ainsi 2 < - x < 8
donc -8 < x < -2
S=]-8 ; -2 [

Exercices d'application

10 Écrire sans valeurs absolues les nombres suivants :
a. $|-4|+|3|$; **b.** $|1{,}407-1{,}408|$;
c. $|\pi-3{,}14|$; **d.** $|2-\sqrt{3}|$.

11 Écrire sans valeurs absolues, suivant les valeurs du réel x, les expressions suivantes :
a. $f(x)=|x-2|$;
b. $g(x)=|x+2|+|2x-1|$.

12 Pour chaque fonction f et g définie dans l'exercice **11** :
a. établir le tableau de variations ;
b. tracer la représentation graphique.

13 Résoudre les équations suivantes :
a. $|x+3|=0$; **b.** $|x-2|=4$;
c. $|4-x|=|5+x|$; **d.** $|0{,}3x^2+2x-5|=-1$.

14 Déterminer les nombres réels dont la distance à 1 est :
a. égale à 2 ; **b.** strictement supérieure à 2.

15 Représenter sur une droite graduée l'ensemble des points M dont l'abscisse x vérifie :
a. $|x-2|\leqslant 3$; **b.** $|5+x|\geqslant 1$;
c. $|4-2x|\leqslant 10$; **d.** $|-x-3|\leqslant|x-7|$.

Voir exercices 49 à 61

Attention aux résolutions algébriques d'équations ou inéquations en valeurs absolues... séparez les cas ex:

$|3x^2-9x+4|=1$

2. fonctions associées

2.1 variations de *u*(*x*) + *k*

Propriété :

Soit un réel k et une fonction monotone u définie sur intervalle I.

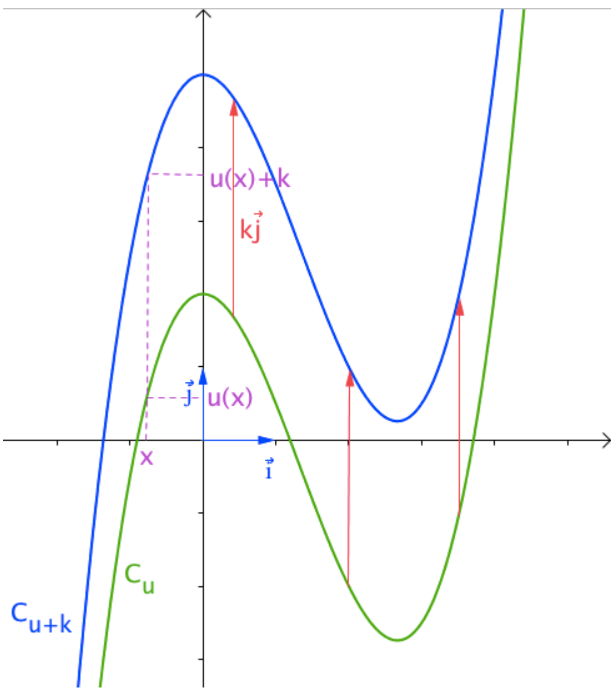
Les fonctions $u + k$ et u ont le même sens de variation sur I.

Démonstration :

- u est croissante sur I signifie que pour tout réel a et b de I tels que $a < b$, on a $u(a) \leq u(b)$.

On ajoute k au deux membres de l'égalité et on a : $u(a)+k \leq u(b)+k$, soit : $(u+k)(a) \leq (u+k)(b)$. Ce qui signifie que $u+k$ est croissante sur I.

- La démonstration est analogue pour la décroissance.



Remarque :

Dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction $u+k$ est l'image de la courbe représentative de la fonction u par la translation de vecteur $k\vec{j}$.

Exemple :

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$

Alors la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 5$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$

2.2 variations de *ku*(*x*)

Propriété :

Soit un réel k et une fonction monotone u définie sur intervalle I.

- Si $k > 0$: Les fonctions $k\,u$ et u ont le même sens de variation sur I.
- Si $k < 0$: Les fonctions $k\,u$ et u ont des sens de variation contraire sur I.

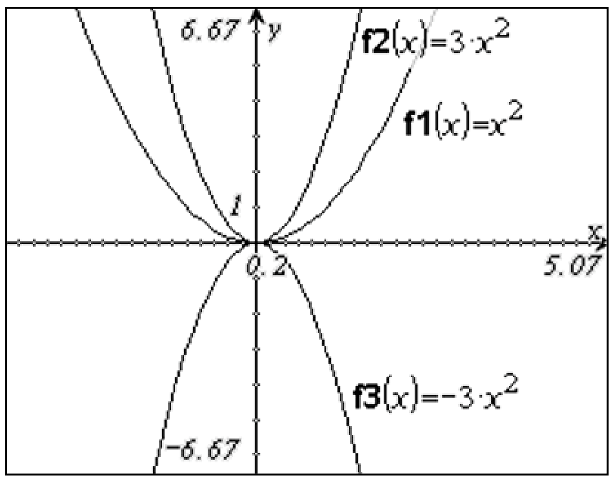
Démonstration dans le cas où u croissante et $k < 0$:

u est croissante sur I signifie que pour tout réel a et b de I tels que $a < b$, on a $u(a) \leq u(b)$.

On multiplie les deux membres de l'égalité par k et on a : $ku(a) \geq ku(b)$ car $k < 0$.

Soit : $(ku)(a) \geq (ku)(b)$. Ce qui signifie que ku est décroissante sur I.

Exemple :



$f_2(x) = 3x^2$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$

$f_3(x) = -3x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$

2.3 variations de $\sqrt{u}$

Propriété :
Soit une fonction monotone u définie sur intervalle I telle que pour tout x de I, $u(x) \geq 0$.
Les fonctions $\sqrt{u}$ et u ont le même sens de variation sur I.

Démonstration :
- u est croissante sur I et à valeurs positives signifie que pour tout réel a et b de I tels que $a < b$, on a $0 \leq u(a) \leq u(b)$.

La fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$ donc on a : $\sqrt{u(a)} \leq \sqrt{u(b)}$, soit : $\left(\sqrt{u}\right)(a) < \left(\sqrt{u}\right)(b)$. Ce qui signifie que $\sqrt{u}$ est croissante sur I.
- La démonstration est analogue pour la décroissance.

Exemple :
$g(x) = \sqrt{x^2}$ est donc décroissante sur ℝ- et croissante sur ℝ+.

Remarque : $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.

2.4 variations de $\dfrac{1}{u}$

Propriété :
Soit une fonction monotone u définie sur intervalle I sur lequel u a un signe constant et ne s'annule pas.
Les fonctions $\dfrac{1}{u}$ et u ont des sens de variation contraire sur I.

Démonstration pour u croissante et à valeurs strictement positive :
u est croissante sur I et à valeurs strictement positives signifie que pour tout réel a et b de I tels que $a < b$, on a $0 < u(a) \leq u(b)$.

La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$, donc on a : $0 < \dfrac{1}{u(b)} \leq \dfrac{1}{u(a)}$, soit : $0 < \left(\dfrac{1}{u}\right)(a) \leq \left(\dfrac{1}{u}\right)(b)$. +Ce qui signifie que $\dfrac{1}{u}$ est décroissante sur I.

Exemple :
$h(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est donc croissante sur ℝ- et décroissante sur ℝ+.

2.5 exemples

Exemples * :

Exploiter ces propriétés pour déterminer le sens de variation de fonctions simples.

Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x-6}$ est croissante sur l'intervalle $[3;+\infty[$.

Démontrer que la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{2-x}$ est croissante sur l'intervalle $]2;+\infty[$