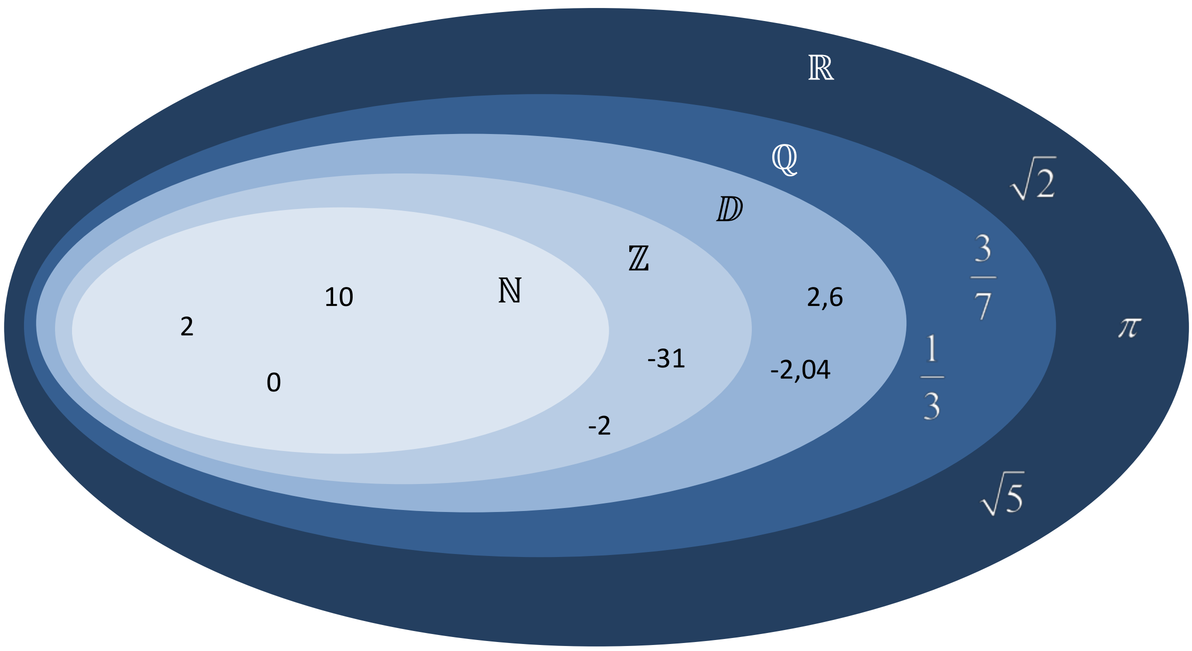
Chapitre 2

Généralités sur les fonctions

1. Prérequis

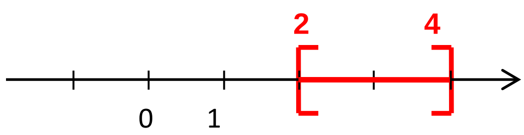
Activité 4

- l'ensemble des entiers naturels (0 ; 1 ; 2 ; 5 ; ....) : il se note IN ;
- l'ensemble des entiers relatifs (-3 ; -15 ; 0 ; 2 ; ......) ; il se note $\mathbb{Z}$;
- l'ensemble des nombres décimaux (2,4 ; 0,0256 ; -6,1 ; ....) ; il se note ID ;
- l'ensemble des nombres rationnels ($\frac{1}{2}$; $\frac{-5}{12}$; 2 ; ...) ; il se note $\mathbb{Q}$;
- l'ensemble des nombres irrationnels (non rationnels) : π ; $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{6}}{4}$; $\frac{-\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$; ....et enfin
- l'ensemble des nombres réels qui contient tous les précédents ; il se noteIR.



Les intervalles de IR

L'ensemble de tous les nombres réels *x* tels que 2 ≤ *x* ≤ 4 peut se représenter sur une droite graduée.

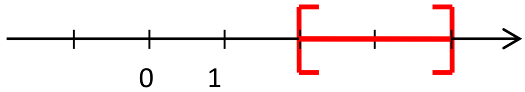
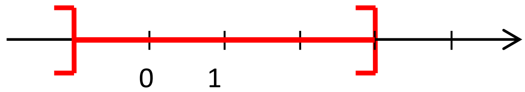
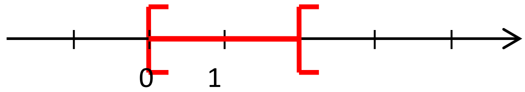
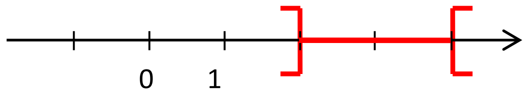
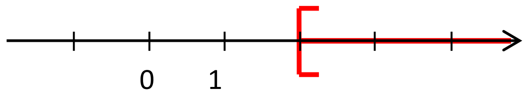
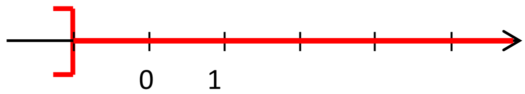
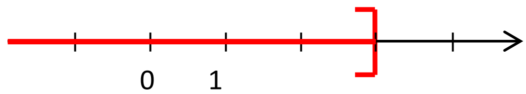
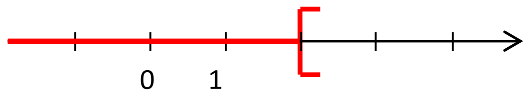


Cet ensemble est appelé un intervalle et se note : [2 ; 4]

Exemple 1 : L'ensemble de tous les nombres réels *x* tels que -2 ≤ *x* ≤ 7 se note : [-2 ; 7].

On a par exemple : $4 \in [-2 ; 7]$ $-1 \in [-2 ; 7]$ $8 \notin [-2 ; 7]$

Exemple 2 : -

Nombres réels *x*	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	[2 ; 4]	
$-1 < x \leq 3$	] -1 ; 3]	
$0 \leq x < 2$	[0 ; 2 [	
$2 < x < 4$	] 2 ; 4 [	
$x \geq 2$	[2 ; +∞ [∞ désigne l'infini	
$x > -1$	] -1 ; +∞ [	
$x \leq 3$	] -∞ ; 3]	
$x < 2$	] -∞ ; 2 [	

Remarques :

- L'ensemble des nombres réels IR est un intervalle qui peut se noter] -∞ ; + ∞ [.
- Pour désigner un ensemble de nombres privé de 0, on ajoute * (ex IR*).
- Pour désigner un ensemble de nombres ne contenant que des nombres positifs (ou négatifs), on ajoute $^{+}$ (ou on ajoute $^{-}$).

Exemple : IR^{+} = [0, + ∞ [et IR^{-} =] - ∞ ; 0]

2. Notion de fonction

Soit E un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

2.1) Définitions

Définir une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ (lire *de* E *dans* $\mathbb{R}$), c'est *associer* (ou *faire correspondre*) à chaque nombre réel $x \in D$, *au plus* un nombre réel (si il existe il est unique) $y \in \mathbb{R}$ appelé image de *x* par la fonction *f*.

On note : $f : E \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Le nombre *y (lorsqu'il existe)*, noté *f(x)*, s'appelle *l'image* de *x* par la fonction f et *x* est ***un*** *antécédent* de *y* par la fonction *f* dans E.

Si tous les nombres réels dans E, ont une image par *f*, on dit que E est le domaine de définition ou ensemble de définition de la fonction *f*. On le note alors D

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ [$x \in D$ si, et seulement si, f(x) existe et est unique]

Remarque

L'ensemble de définition d'une fonction est le sous ensemble de l'ensemble de départ des nombres qui ont une image par *f*

Exemple :

Soit *g* la fonction qui à chaque nombre associe la somme de son double et de 1.
g est définie sur $\mathbb{R}$ et on écrit : $g : x \mapsto 2x + 1$ ou $g(x) = 2x + 1$

L'image de 3 par *g* est $g(3)$ avec $g(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$
Donc 7 a pour antécédent 3.

L'antécédent de 21 par *g* est le nombre *a* tel que $g(a) = 21$. or $g(a) = 2 \times a + 1 = 2a + 1$
Donc $2a + 1 = 21$ donc $a = 10$. L'antécédent de 21 est 10 car $g(10) = 21$.

On peut définir une fonction de plusieurs manières :

- Avec une expression du « langage courant » ou « langage usuel » ;
- Avec une « expression algébrique » ou une « formule »,
- Avec un programme informatique ;

Informatique Pgm1. Choisir un nombre
Calculer son carré
Calculer son cube
Calculer la somme de son carré et son cube
Afficher le résultat

- Avec un tableau de valeurs « point par point » ; ou un tableur ;
- Avec une courbe représentative ;

Il est plus ou moins facile de passer parfois de l'une à l'autre.

Exemples

- En langage courant : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout nombre réel associe « la somme de son carré et de son cube ».
- Par une expression algébrique la fonction f est définie sur D = $\mathbb{R}$ par :

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) = x^2 + x^3$$

- Par un tableau de valeur :

(insuffisant pour définir les images de tous les nombres si le domaine de définition n'a pas un nombre fini de valeurs)

x	–3	–2	–1	0	1,5	2	3
$f(x)$	–18	– 4	0	0	5,625	12	36

- Par un programme informatique Pgm1.

Choisir un nombre
Calculer son carré
Calculer son cube
Calculer la somme de son carré et son cube
Afficher le résultat

```
VARIABLES
  └X EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  ├LIRE X
  ├AFFICHER "X carré plus X au cube vaut"
  └AFFICHERCALCUL pow(X,2)+pow(X,3)
FIN_ALGORITHME
```

2.2) Représentation graphique

a) Repère orthonormé

Trois points distincts O, I et J non alignés forment un repère (O, I, J) des points du plan.

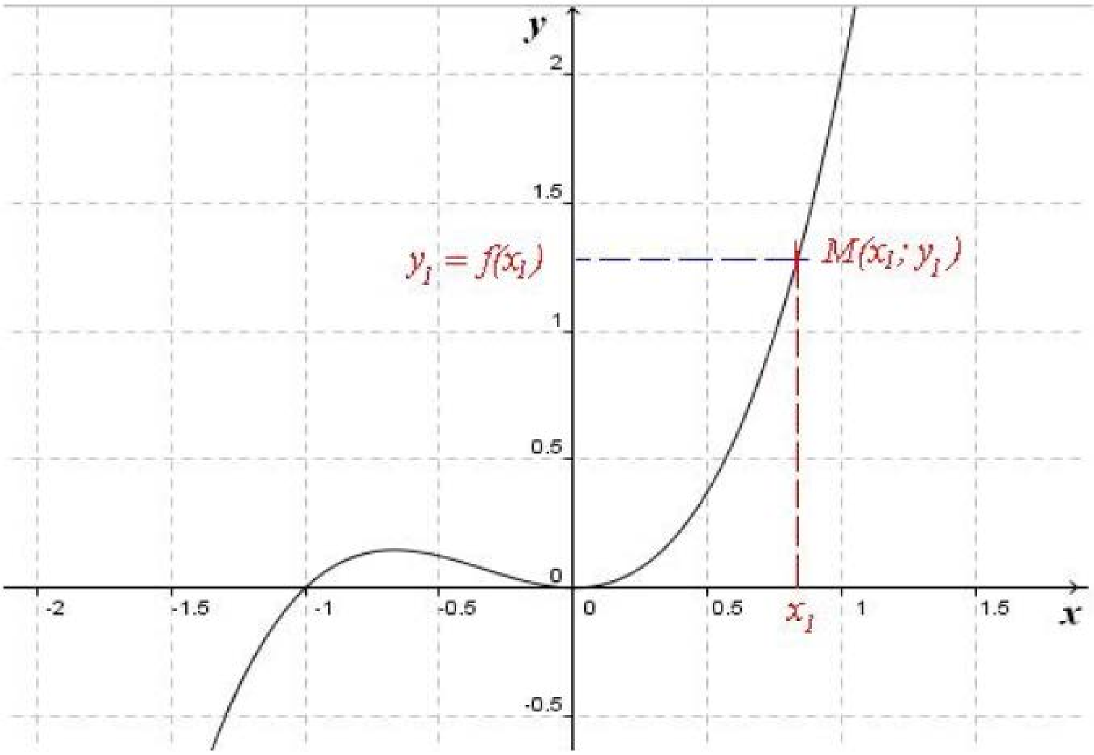
- O est l'origine du repère ;
- (OI) est l'axe des abscisses et OI est l'unité de la graduation sur cet axe.
- (OJ) est l'axe des ordonnées et OJ est l'unité de la graduation sur cet axe.

Tous les points du plan sont « *repérés* » par un couple de deux coordonnées (x,y)

b) Représentation graphique

La « représentation graphique » ou « courbe représentative » de *f* dans un repère donné (orthonormé ou non) est l'ensemble de tous les points M de coordonnées ***(x ; f(x))*** où $x \in D$.**(ou D est le domaine de définition de *f*)** On note souvent C_f cette représentation graphique.

Pour tout $x \in D$: [M$(x, y) \in C_f$ si et seulement si $y = f(x)$]

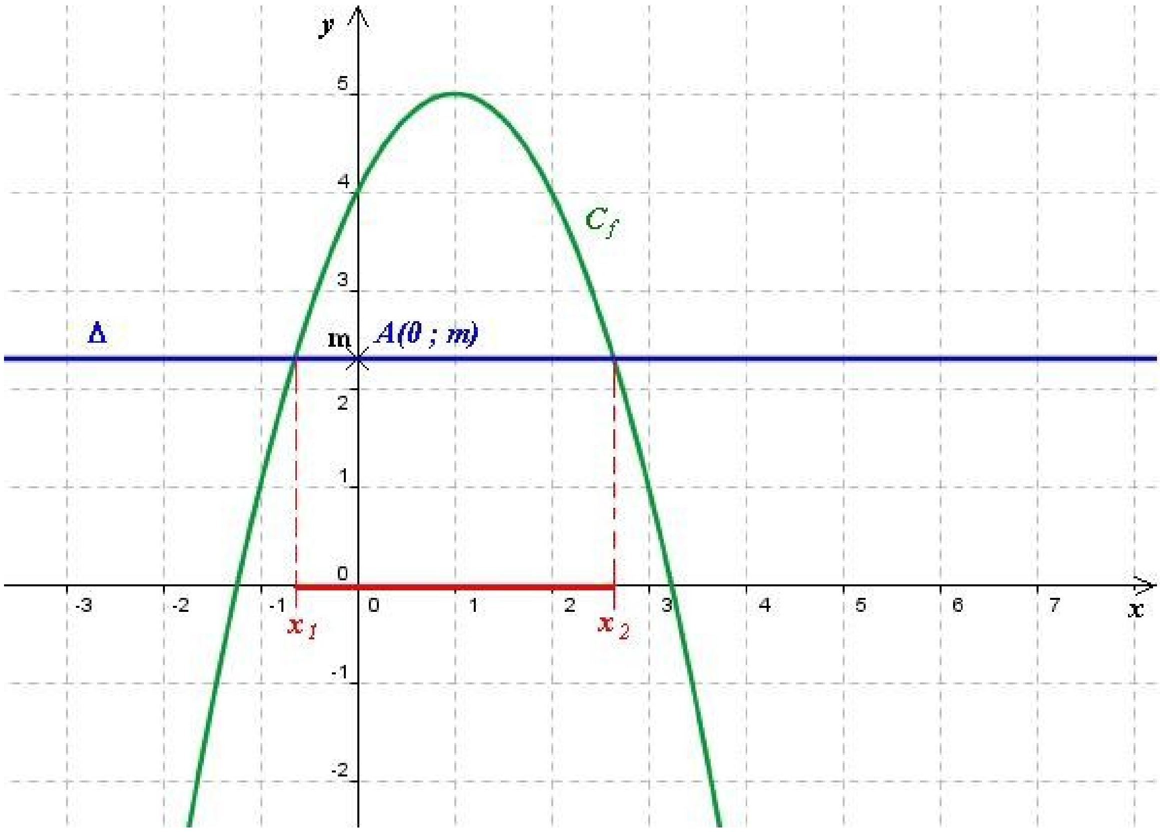


On utilise pour la tracer soit un tableau de valeur que l'on construit et on "extrapole" si le tracé semble "d'un seul trait" soit *graph sur calculatrice soit un programme informatique*

2.3) Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Soit f une fonction définie sur un intervalle D de ℝ et C_f sa courbe représentative dans un repère (O ;I ;J).

La droite Δ parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point *A(0 ;m)* coupe (ou ne coupe pas) la courbe C_f.



a)**Résolution de l'équation : *f(x) = m***

Cela revient à déterminer l'ensemble des antécédents de m, s'il en existe, par la fonction *f*, ou encore à chercher l'ensemble des abscisses des points d'intersection s'il en existe, de la courbe C_f avec la droite Δ.

Résoudre les équations : (1) $f(x) = 1$; (2) $f(x) = 0$; (3) $f(x) = 5$ et (4) $f(x) = 6$.

Exemple 1 : Pour résoudre l'équation (1), on trace la droite Δ_1 (pou y = 1) et on cherche les abscisses des points d'intersection s'il en existe, de la courbe C_f avec la droite Δ_1 .

Dans ce cas, la droite Δ_1 coupe la courbe en deux points d'abscisses : $x = -1$ et $x = 3$.

On peut conclure de deux manières :

Conclusion 1. L'équation (1) « $f(x) = 1$» admet deux solutions –1 et 3. Donc S={–1 ;3}.

Conclusion 2. Le nombre 1 admet deux antécédents par la fonction *f*, qui sont –1 et 3.

b)**Résolution de l'inéquation : *f(x) > m***

Cela revient à déterminer l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f, s'il en existe, situés au-dessus de la droite Δ.
Résoudre les équations : (1) $f(x) > 1$; (2) $f(x) > 4$; (3) $f(x) > 5$ et (4) $f(x) > 6$.

Exemple 2 : Pour résoudre l'inéquation (1), on trace la droite Δ_1 (pour y = 1)
et on cherche les abscisses de tous les points de C_f, situés au-dessus de la droite Δ_1 .

Ici, les abscisses des points de la courbe situés au-dessus de la droite Δ_1 sont tous les nombres réels x compris entre -1 et 3 ; c'est-à-dire $-1 < x < 3$. Ce qui correspond à l'intervalle $]-1;3[$.

Conclusion : L'ensemble des solutions de cette inéquation est : $S =]-1;3[$.

c)**Résolution de l'inéquation : *f(x) < m***

Cela revient à déterminer l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f, s'il en existe, situés en dessous de la droite Δ.

Résoudre les équations : (1) $f(x) < 1$; (2) $f(x) < 4$; (3) $f(x) < 5$ et (4) $f(x) < 6$.

Exemple 3 : Pour résoudre l'inéquation (1), on trace la droite Δ_1 (pour y = 1)
et on cherche les abscisses de tous les points de C_f, situés en dessous de la droite Δ_1 .

Dans ce cas, les abscisses des points de la courbe situés en dessous de la droite Δ_1 sont tous les nombres réels *x inférieurs à* -1 ou *x supérieurs à* 3 ; c'est-à-dire $x < -1$ ou $x > 3$.
Ce qui correspond à la réunion des deux intervalles $]-\infty;-1[$ et $]3;+\infty[$.

Conclusion : L'ensemble des solutions de cette inéquation est : $S =]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$.